Geometria Diferencial: Teoria e Aplicações

João Paulo dos Santos

Universidade de Brasília

22 de setembro de 2020

Programa de Pós-graduação em Matemática na UnB

- Programa consolidado (desde 1962): Primeiro doutor formado pela UnB (1978)
- Mais de 400 alunos de mestrado e 100 alunos de doutorado desde 1962
- Consistentemente ranqueado entre os 5 melhores programas de pós-graduação em Matemática do Brasil
- Atualmente com mais de 100 alunos, divididos entre dois programas: Mestrado (45%) e Doutorado (55%), sendo 15% dos alunos do exterior.
- Bolsas: CAPES, CNPq e FAPDF.

Pós-graduação na UnB - Intercâmbio Científico

- Colaboração internacional: Bélgica, China, EUA, França, Espanha, Itália, Holanda, Hong Kong, México, Reino Unido, Rússia, dentre outros.
- Seminários semanais em várias áreas de pesquisa.
- Escola de Verão.
- Workshop de Verão em Matemática.

Pós-graduação na UnB - Linhas de Pesquisa

- Álgebra: Teoria de Grupos, Álgebras Associativas e Não-Associativas.
- Análise: Equações Diferenciais Parciais e Análise não-linear.
- Geometria Diferencial: Geometria Riemanniana, Análise Geométrica e Geometria das Subvariedades.
- Mecânica: Mecânica de Fluidos, Análise Numérica e Modelagem Computacional.

Pós-graduação na UnB - Linhas de Pesquisa

- Álgebra: Teoria de Grupos, Álgebras Associativas e Não-Associativas.
- Análise: Equações Diferenciais Parciais e Análise não-linear.
- Geometria Diferencial: Geometria Riemanniana, Análise Geométrica e Geometria das Subvariedades.
- Mecânica: Mecânica de Fluidos, Análise Numérica e Modelagem Computacional.

Pós-graduação na UnB - Linhas de Pesquisa

- Teoria da Computação: Teoria da Computação, Lógica Matemática e Fundamentos.
- Teoria da Probabilidade: Inferência em Processos Estocásticos, Mecânica Estatística e Análise Estocástica.
- Teoria dos Números: Teoria Transcendente e Combinatória, Equações Diofantinas, Sequências.
- Sistemas Dinâmicos: Aspectos da dinâmica relacionados a simetrias e probabilidade.

Geometria Diferencial

- Geometria Diferencial: geometria + cálculo diferencial e integral
- interações com: topologia, análise (equações diferenciais parciais), álgebra, sistemas dinâmicos
- aplicações em: física, engenharia, arquitetura, biologia

Origem da geometria (2000∼1800 a.c.)

- geometria antiga: coleção de regras e métodos obtidos por meio de experimentações, observações, analogias, intuição.
- 1800 a.c.: $\pi \sim \left(\frac{16}{9}\right)^2 \sim 3,1604$
- erros e acertos: fórmula correta para o cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada e uso da fórmula da área do retângulo para calcular área de quadriláteros quaisquer.

Euclides (300 a.c.): estrutura lógica da Geometria

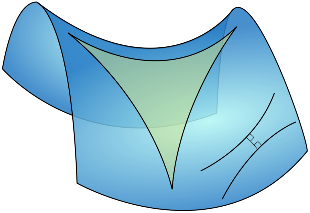
- gregos: afirmações geométricas deveriam ser estabelecidas através de raciocínio dedutivo, ao invés de tentativa e erro.
- Tales: primeira geometria lógica
- Euclides e os Elementos: tratado definitivo da geometria grega.

Geometria axiomática e o axioma das paralelas

- axiomas ou postulados: afirmações aceitas sem necessidade de justificativa.
- Euclides baseou a geometria dos Elementos em 5 postulados.
- quatro primeiros: intuitivos e prontamente aceitos.
- quinto axioma ou axioma das paralelas: *Para toda reta l e todo ponto P fora de l, existe uma única reta m passando por P e paralela a l*

Gauss (1827): Axioma das paralelas e triângulos geodésicos

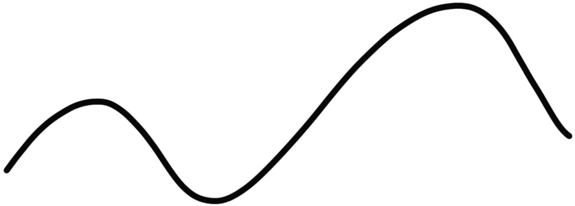
- O axioma das paralelas é equivalente à afirmação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.
- Gauss (1827): existência de triângulos em que a soma dos ângulos internos é diferente de 180 graus.
- novo conceito em geometria: a curvatura.



imagens: wikipedia

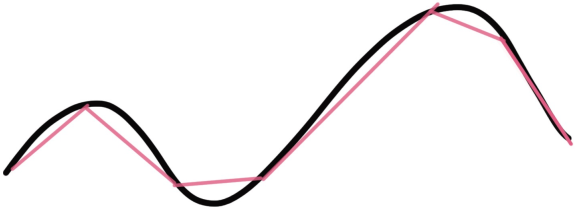
Geometria diferencial: conceitos básicos

- cálculo diferencial e integral para tratar problemas em geometria
- $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ curva regular se $c'(t) \neq 0$, para todo t.



Geometria diferencial - conceitos básicos: comprimento

- cálculo diferencial e integral para tratar problemas em geometria
- $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ curva regular se $c'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0$, para todo t.

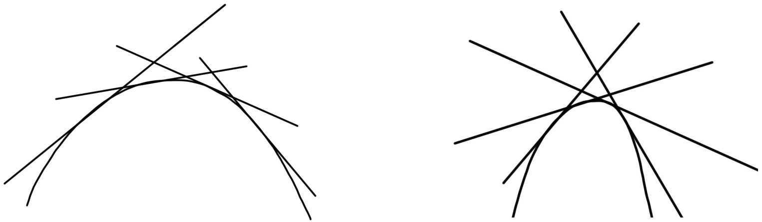


- Comprimento de c: $\mathcal{L}(c) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Geometria diferencial - conceitos básicos: curvatura

intuitivamente, a curvatura de uma curva mede a taxa de variação de direções tangentes.

- reta: curvatura zero.
- círculo de raio R: curvatura igual a $\frac{1}{R}$



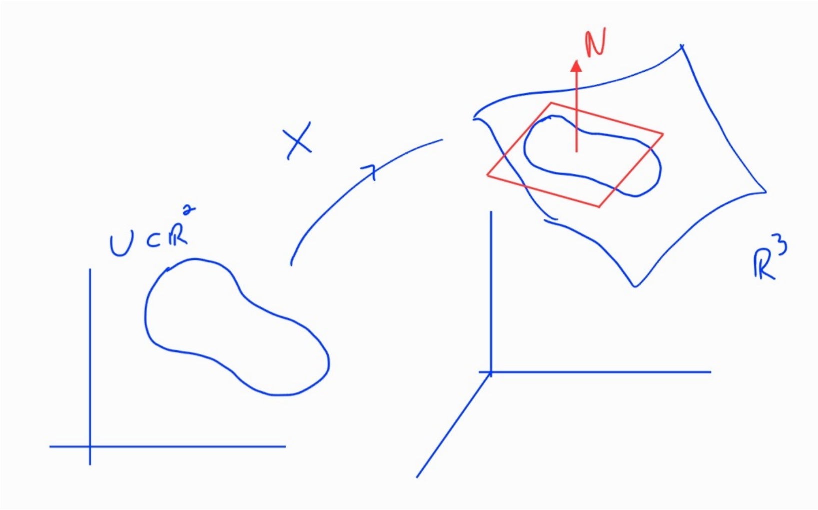
- Montiel e Ros: Uma superfície é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ tal que cada um dos seus pontos possui uma vizinhança que se assemelha a um pedaço de plano que se curva suavemente e sem auto-interseções.

Uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular se é diferenciável de dX_q é injetiva para todo $q = (u, v) \in U$. Equivalentemente,

- existe plano tangente bem definido em cada ponto.
- os vetores $\dfrac{\partial X}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial X}{\partial v}$ são linearmente independentes.
- $\dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \neq 0$

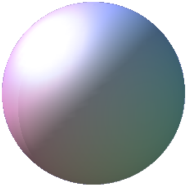
Assim, fica bem definido um vetor unitário normal ao plano tangente

$$N(u, v) = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \right|}$$

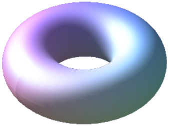


$U \subset \mathbb{R}^2$
X
N
$\mathbb{R}^3$

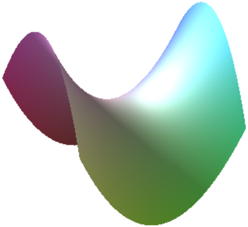
Exemplos



Esfera



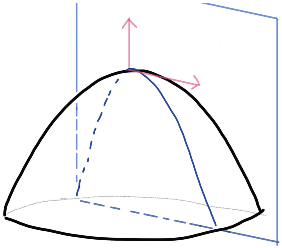
Toro



Parabolóide Hiperbólico

curvaturas principais, curvaturas Gaussiana e média

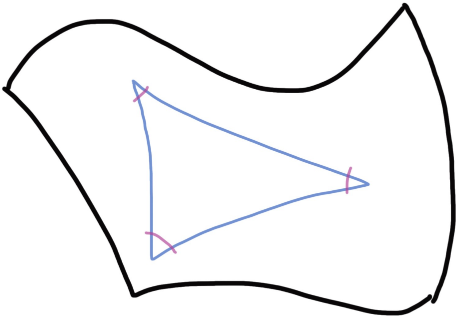
- curvaturas principais: k_1 e k_2 máximo e mínimo das curvaturas normais.
- curvatura média: $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$
- curvatura Gaussiana: $K = k_1 k_2$.



Teoremas de Gauss

- Teorema *Egregium* de Gauss: a curvatura Gaussiana depende apenas da geometria da superfície.
- Teorema *Elegantissimum* de Gauss: Se T é um triângulo geodésico, então a soma dos ângulos internos é dada por

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi + \int_T K dA$$



Riemann (1854): Geometrias Abstratas

- Riemann generaliza as ideias de Gauss: geometria em dimensões superiores.
- Estudo de geometria intrínseca: as superfícies (e mais geralmente, as variedades Riemannianas) não necessariamente devem ser subconjuntos de outros espaços. Generalização das ideias de János Bolyai, Nikolái Lobachevski.

imagem: wikipedia

Pesquisa em variedades Riemannianas

- topologia e geometria intrínseca de variedades Riemannianas.
- análise geométrica (equações diferenciais parciais em variedades Riemannianas).
- imersões isométricas $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}$.

Conjectura de Poincaré

- Problemas do Prêmio do Milênio: são sete problemas matemáticos estabelecidos pelo Instituto Clay de Matemática.
- A correta solução resulta em um prêmio de um milhão de dólares.
- Um dos problemas foi resolvido pelo matemático russo Grigori Perelman utilizando técnicas de geometria diferencial, a saber, o fluxo de Ricci.

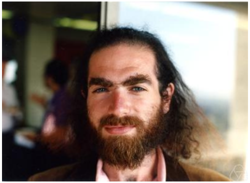
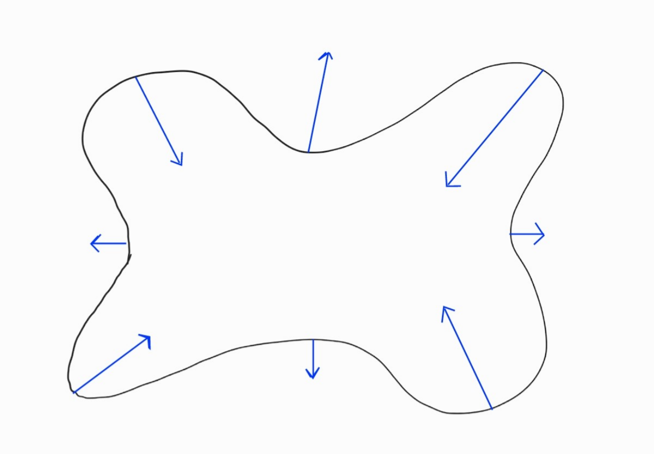


Imagem : Wikipedia

Fluxo redutor de curvas

- evolução pela curvatura na direção normal
- simulador para o fluxo redutor de curvas: a.carapetis.com/csf/



Fluxo da Curvatura Média

Dada uma superfície parametrizada regular X uma família suave superfícies $X_t : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, é uma solução para o fluxo da curvatura média, com condição inicial X, se satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_t}{\partial t} = -H(u,v,t)N(u,v,t), \\ X_0 = X, \end{cases} \tag{1}$$

Aplicações do fluxo da curvatura média

- Exemplos de tecnologias de computação gráfica: tomografia computadorizada, ressonância e ultrassom 3D, e também em escaneamento a *laser*.
- Os processos consistem em captura de imagens que, tipicamente apresentam algumas imperfeições (também conhecidas como "ruídos").

O fluxo da curvatura média com as suas propriedades "suavizantes" atua no processo de aprimorar e suavizar as imagens obtidas, com a reparação dos ruídos.

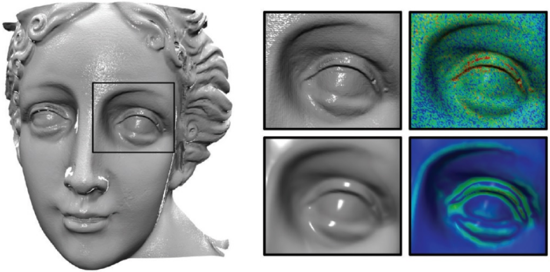
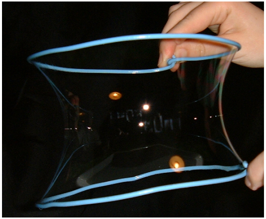


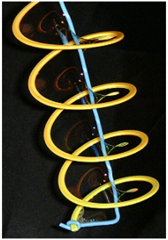
imagem: Botsch *et al.* - Polygon mesh processing - 2010.

imagens: Clarenz *et al.* - On Generalized Mean Curvature Flow in Surface Processing - 2003

Superfícies com curvatura média constante

- "melhores formas" : superfícies com curvatura média constante.
- superfícies mínimas: $H = 0$ películas de sabão e o problema de Plateau.





imagens: Blinking Spirit Wikimedia

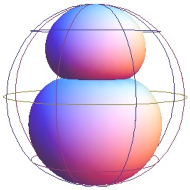
Superfícies com curvatura média constante

- problema isoperimétrico em $\mathbb{R}^2$: o problema da Princesa Dido.
- $H \neq 0$: problema isoperimétrico em $\mathbb{R}^3$ e as bolhas de sabão.
- Aplicações em ciências de materiais, engenharia biomolecular e arquitetura.

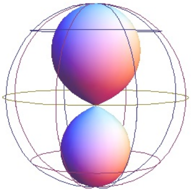
imagem: Pixabay-PhotoSteff-Creative Commons

Geometria hiperbólica 3-dimensional: superfícies com curvatura zero

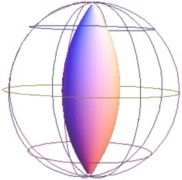
- Trabalho em coloboração com o prof. Antonio Martinez (Universidad de Granada) e a prof. Keti Tenenblat (UnB)
- rotacionais (Kokubu-Umehara-Yamada)



Snowman
(Homem de Neve)



Hourglass
(Ampulheta)



hyperbolic cylinder
(cilindro hiperbólico)

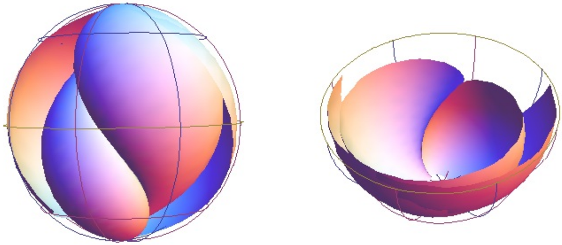
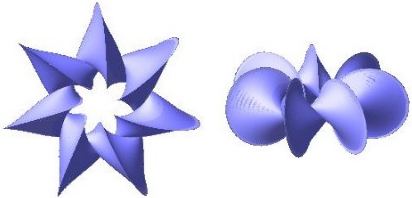


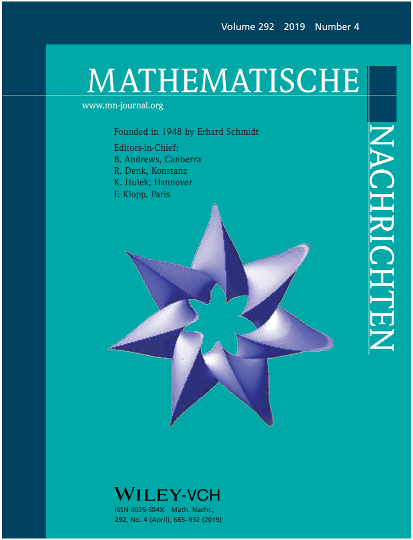
Figura: propriamente helicoidais

Geometria Esférica 3-dimensional: superfícies com curvatura zero

- Trabalho em colaboração com o prof. Fernando Manfio (USP-São Carlos)



Capa da Revista Alemã Mathematische Nachrichten



Einstein (1915): Geometria + Física

- geometria do espaço-tempo: compreensão do universo através das ideias desenvolvidas por János Bolyai, Nikolái Lobachevski e Bernhard Riemann.
- a geometria descoberta por Riemann permitiu que Einstein investigasse espaço e tempo de forma unificada.

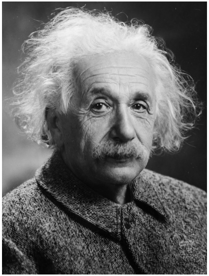
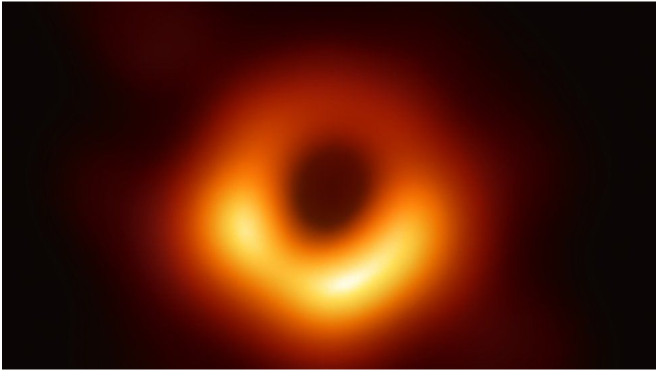


Foto: wikipedia

Einstein (1915): Geometria + Física

- R. Penrose: "Einstein era um bom matemático intuitivo e teve um pouco de problema com essas ideias, mas sabia o que queria. Quando viu o que Riemann havia feito, soube que era isso", (Fonte: BBC.com - Os matemáticos que ajudaram Einstein e sem os quais a Teoria da Relatividade não funcionaria).

Foto: Wikipedia



- primeira imagem registrada de um buraco negro (Foto: Event Horizon Telescope (EHT))

De equações abstratas à transmissão de dados

- Em 1989 o professor da UnB, Mauro Rabelo, estudou um conjunto de equações em sua tese de Doutorado associadas a superfícies de curvatura Gaussiana constante igual a -1.
- as aplicações surgiram em óptica não-linear, descrevendo a propagação de pulsos de luz ultra-curtos em fibras ópticas de silica. Esses pulsos ultra curtos são muito importantes para transmissão óptica ultra-rápida de informação.

Foto: agência UnB

Manfredo do Carmo, ao ser perguntado sobre qual a principal aplicação da geometria diferencial:

"Sua aplicação clássica é na parte de Relatividade e Cosmologia. Pode ser que o mundo seja modelado pela Geometria Diferencial. (...) É praticamente impossível prever o que vai ser ou não aplicável. (...) Escrevi um livro de Geometria Diferencial que é muito citado em assuntos de neurobiologia da visão, mas eu não tenho a menor ideia de como nem por quê. Muito provavelmente, eu nao entenderia nada daquilo." (Livro IMPA 50 anos)

Foto: IMPA

- Se você se interessa pelos temas apresentados e quer continuar seus estudos em Geometria Diferencial (ou qualquer outra área em Matemática Pura ou Aplicada), o Programa de Pós-graduação em Matemática da UnB abrirá as inscrições em breve.
- Mais informações em www.mat.unb.br
- Esperamos vocês no Departamento de Matemática da UnB!

Obrigado!