UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA-CAMPUS DE JI-PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
XX SEMANA DE MATEMÁTICA
A Matemática e algumas de suas ramificações: Matemática pura, Matemática aplicada e Educação matemática. Tudo junto e misturado ?
22 a 25 de Setembro de 2020
Informações: www.dmejp.unir.br
www.sematjp.unir.br

Registros de Representação Semiótica: epistemologia, aprendizagem e ensino

Rita de Cássia Pistóia Mariani
Departamento de Matemática
rcpmariani@yahoo.com.br

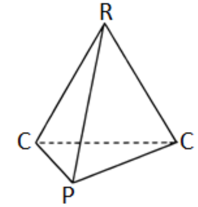
Universidade Federal de Santa Maria 1960

PPGEMEF
Universidade Federal de Santa Maria
UFSM

Algumas vivências e reflexões ...

Formação

Formação Continuada de Professores: Ensino de Geometria



[...] representar um objeto geométrico por meio de um desenho, busca uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades [...] compatível com a imagem mental global que têm do objeto.

(MACHADO, 1995) (BRASIL, 1998, p.125)

... 1990 1994 1997 2000 ... 2003 2006 ...

Transição da Educação Básica para o Ensino Superior

Atuação

... 1999 2008 2013 ...

EMgep

Contrato Didático e Registros de Representação Semiótica (RRS);
- Coordenação RSS: tomando o conceito de função no registro gráfico;
- Tarefas nas disciplinas de Pré-Cálculo e Cálculo I;

* RGr: identificação de variáveis visuais pertinentes e interpretação global;
* RLN: revelaram conhecimentos “mascarados” por algoritmos ;
*RLN: ampliaram funções cognitivas do discurso;
*RLN: apesar da interpretação global no RGr foram identificados tratamentos de localização por seleção de pontos (cláusulas do contrato didático ou menor custo cognitivo);
* RSb-> desprovidos de significado; designação/resignação;

Ideias iniciais sobre Registros de Representação Semiótica ...

Uma conversa sobre RRS envolve ...

(1937)

Análise Pontual

Objeto Matemático

Registro Gráfico

Língua Natural

Significado

Tratamento

Representação

Conversão

Forma

Interpretação Global

Apreensões

Sistemas de escritas

Figuras Geométricas

Designação

Conteúdo

Significante

Dimensões

Congruência Semântica

Um objeto matemático ...

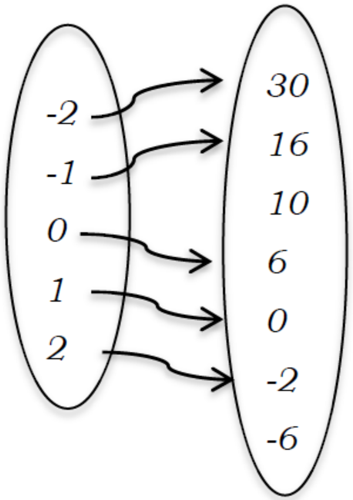
$$f(x) = 2(x-1)(x-3)$$

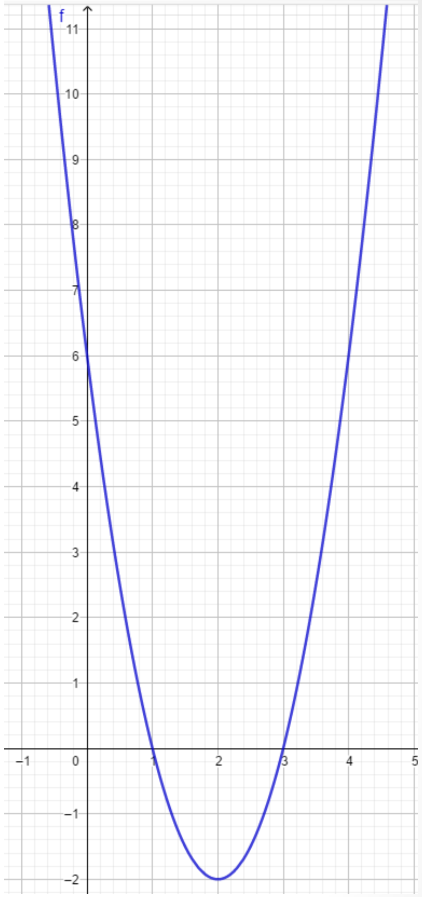
Registro Simbólico Algébrico

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f: R \to R$$
$$x \mapsto 2x^2 - 8x + 6$$

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 2$$





Registro Simbólico Numérico

$$\{(-2{,}30)\ ,(-1{,}16)\ ,(0{,}8)\ ,(1{,}0)\ ,(2,-2)\}$$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	30	16	6	0	-2

Duas vezes o quadrado de um número, menos oito vezes esse número, mais seis unidades, é a transformação do número.

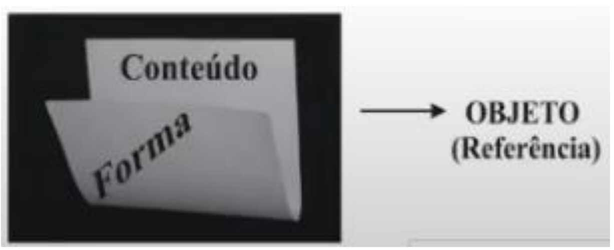
A função que atribui, a cada variável, o dobro de seu quadrado, menos oito vezes, mais seis unidades.

[...] não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata [...] (DUVAL, 2012, p.268)

[...] os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. (DUVAL, 2012, p.268)

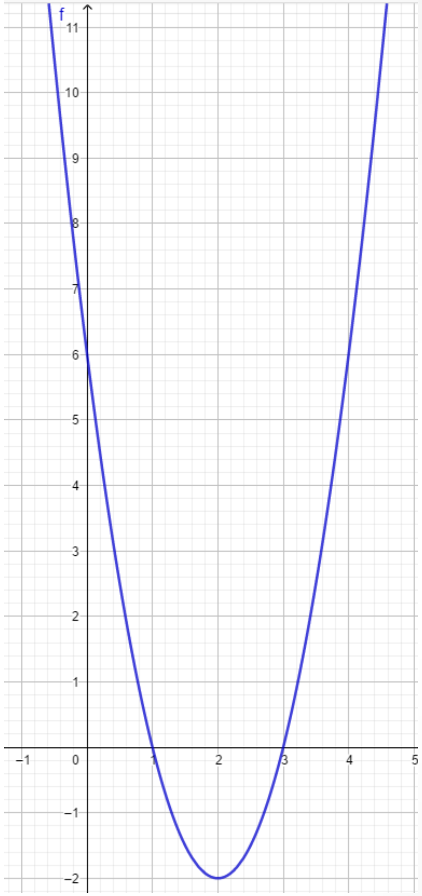
$$\{(-2{,}30)\,,(-1{,}16)\,,(0{,}8)\,,(1{,}0)\,,(2,-2)\}$$

$$\begin{aligned} f:\ & R \to R \\ & x \mapsto 2x^2 - 8x + 6 \end{aligned}$$



(MORETTI; THIEL, 2012, p.283)

Mudança de forma pode acarretar mudança de conteúdo.
(DUVAL, 2004, p. 50)



Dificuldades dos alunos...
 -diversidade/complexidade de transformações;
-não a partir dos objetos/conceitos, mas do funcionamento representacional (próprio de cada registro) (DUVAL, 2012)

A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática.
(DUVAL, 2012, p.268)

Paradoxo Cognitivo

Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?

(DUVAL, 2012, p.268)

E, de modo inverso, como os sujeitos podem adquirir o domínio de tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se eles não têm uma apreensão conceitual dos objetos representados?

(DUVAL, 2012, p.268-269)

Não há noesis sem semiose

Apreensão conceitual de um objeto

Apreensão ou produção de uma representação semiótica

Coordenação de registros de representação semiótica

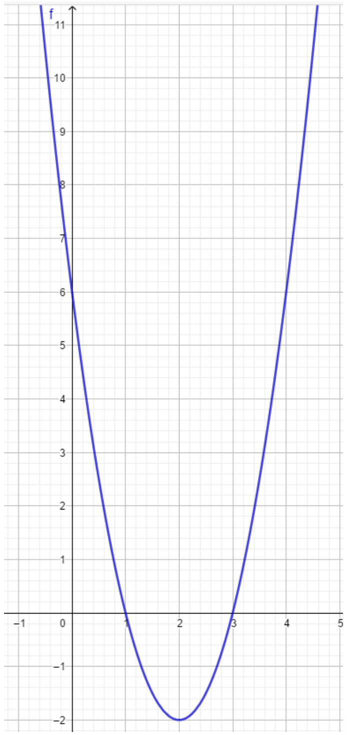
[...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro.

(DUVAL, 2012, p.270)

$$f(x) = 2(x-1)(x-3)$$

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 2$$



Variáveis visuais pertinentes

- ✓ Economia de tratamento;
- ✓ Complementaridade de registros (representações são parciais)
- ✓ Conceitualização implica coordenar ao menos dois RRS.

Tratamentos no Gráfico...

- ✓ **Abordagem ponto a ponto:** É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto (e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números).

- ✓ **Extensão do traçado efetuado:** atividades de interpolação e extrapolação aos quais se apoiam o que se denominou de aspectos produtores ou redutores das representações gráficas.

- ✓ **Interpretação global de propriedades figurais: não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica".**

(DUVAL, 2011)

Atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose

Sistema Semiótico ->Registro de Representação

-Formação de uma representação identificável:

Recurso a um ou mais signos para evocar um objeto, relacionado com um processo de seleção de traços, caracteres ou determinações do que se quer representar.

-Tratamento:

É caracterizado pela falta de alteração do sistema semiótico na transformação de uma determinada representação.

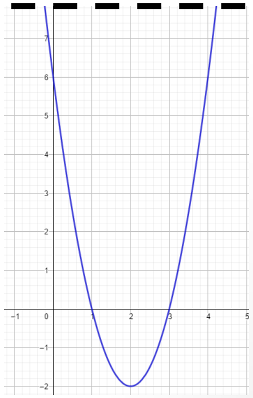
$$2x^2 - 8x + 6$$

$$2(x^2 - 4x + 3) + 2 - 2$$

$$f\,2(x^2 - 4x + 4) - 2$$

$$2(x-2)^2 - 2$$

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 2$$



-Conversão:

É uma transformação de uma representação de um objeto em um registro, em outra representação do mesmo objeto, porém em outro registro.

Representações Semióticas

"[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39)

Registros

"[...] campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios" (DUVAL, 2012, p. 1)

Sistemas de escritas

Gráficos

Figuras Geométricas

Língua Natural

Descartes no livro I de Geometria em 1637, ***distinguir a escrita algébrica das curvas e suas representações figurais***

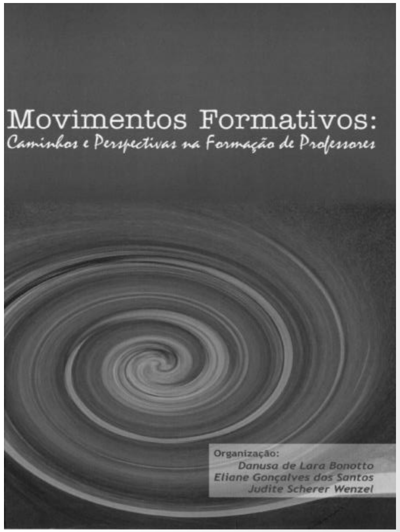
Uma experiência de pesquisa no Cálculo ...

Pré-Cálculo/Cálculo

-Disciplina considerada importante, que pode assumir um caráter unificador: modelar fenômenos de outras áreas, obter instrumentos para resolução de problemas de variação, além de fundamentar conceitos da própria matemática.

-Conceitos subjacentes (funções, geometria analítica, etc.) trabalhados no decorrer da Educação Básica: compartimentalizados e monofuncional;

-Consequência: altos índices de reprovação e evasão; compreensão tipicamente algébrica e não visual;



Sequência: Grupo A e Grupo B

Sequência foi desenvolvida com dois grupos distintos

- Grupo A: (2005) 14 acadêmicos; software Imagiciel, desenvolvido pelo (CREEM) Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques;
- Grupo B: (2013) 10 acadêmicos, software GeoGebra.

Revisitando a Sequência:

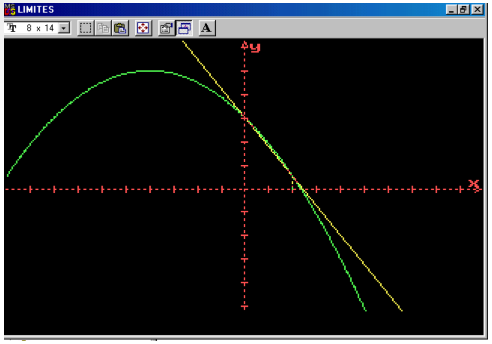
-potencialidades na elaboração/aquisição de conceitos matemáticos;

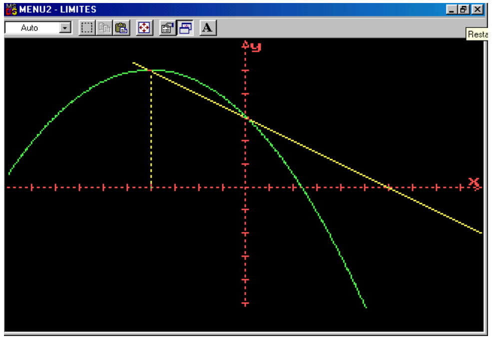
-possibilidade de mudança do software Imagiciel (banco de questões pré-programadas) apenas, o registro gráfico;

-GeoGebra explora representações algébrica, gráfica e numérica.

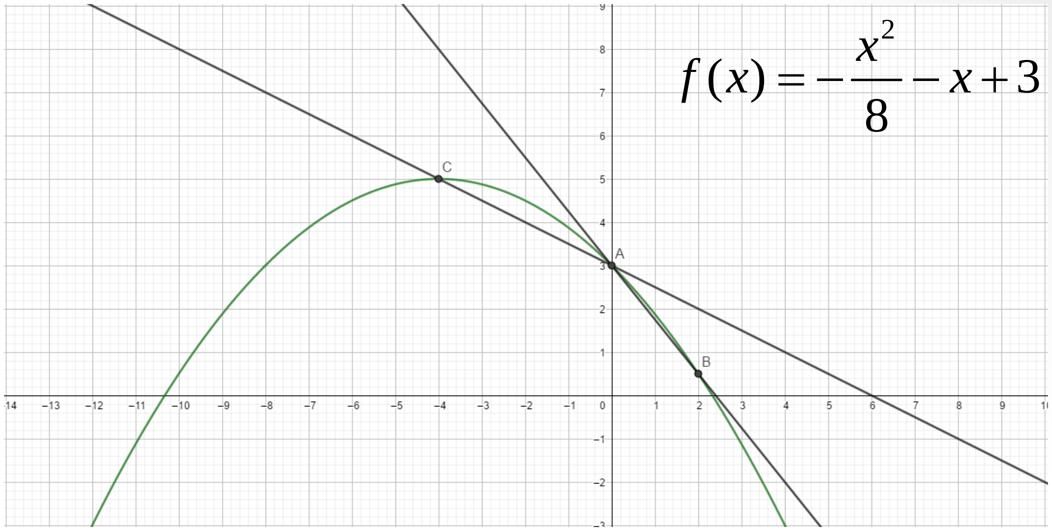
GRUPO A: Currículo em conformidade com a Resolução 01 e a Resolução 02 do CP/CNE de 2002 (entendimento de que as disciplinas de conteúdos matemáticos não têm responsabilidades com a formação pedagógica do professor de matemática);

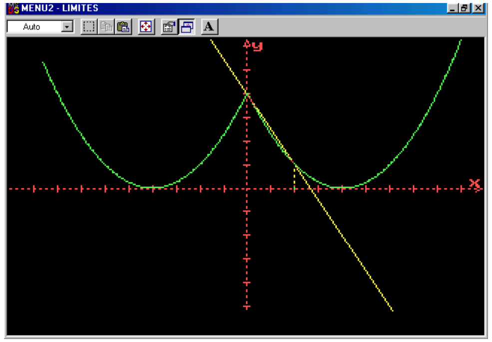
GRUPO B: Outra proposta curricular, acesso a softwares em outros conceitos matemáticos e na disciplina de Informática no Ensino de Matemática, no início do Curso.

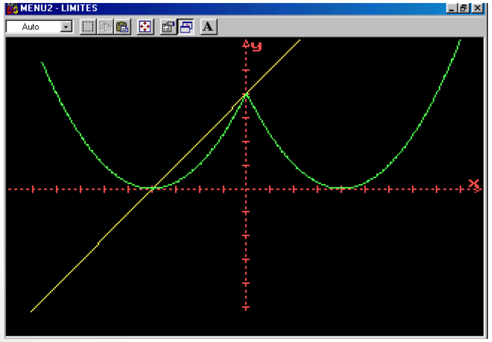




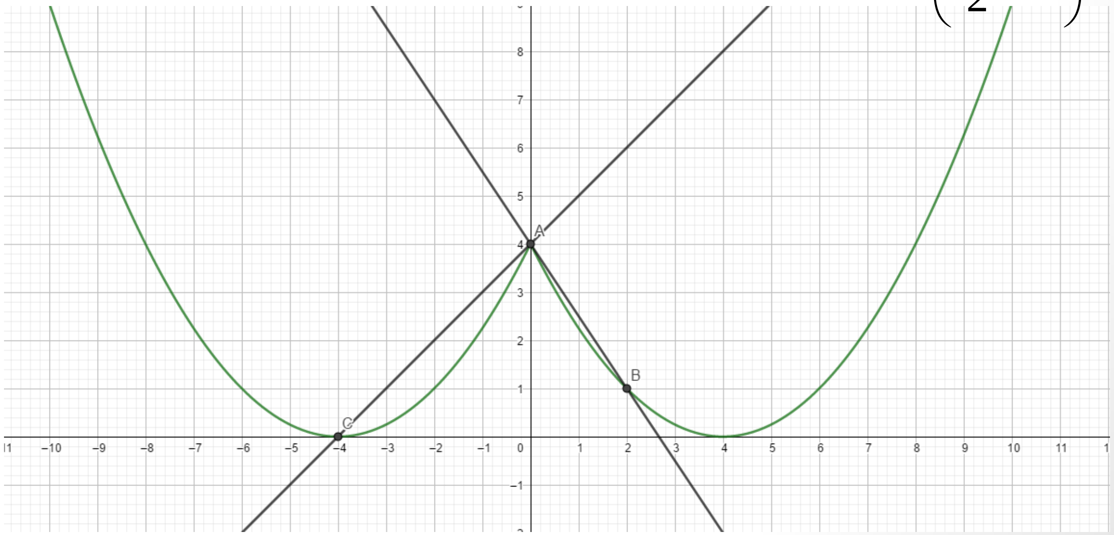
$$f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$$







$$h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$$



Para responder às questões de 1 a 10, trabalharemos, inicialmente, com a função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e, em seguida, com a função $h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$.

1- Esboce o gráfico das funções dadas e descreva passo a passo seu procedimento.

2- Usando o software GeoGebra, trace o gráfico das funções dadas.
a) Este gráfico coincide com o que você traçou anteriormente?
b) Se não for igual, quais foram as diferenças observadas?
c) Por que você acha que houve estas diferenças?
d) Se os gráficos não forem coincidentes, refaça-os explicando o que e por que mudaram.

3- Determine o domínio dessa função. Justifique sua resposta.

4- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $B(2, f(2))$.
a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e B.
b) Trace a reta AB. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AB. Vamos chamar essa inclinação de m.

5- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $C(-4, f(-4))$.
a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e C.
b) Trace a reta AC. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AC. Vamos chamar esta inclinação de m.

6- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $M(t, f(t))$, $t \in \Re$.
a) Trace a reta AM. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AM.
b) O valor obtido é um número ou o resultado depende de t?
c) Se for um número indique-o por m; se depende de t, indique-o por $m(t)$. Justifique sua escolha.

7- Com base no resultado anterior, complete a tabela, utilizando quatro casas decimais.

t	2	0.5	0.1	0.01	0.002
$m(t)$					

a) O valor de t está se aproximando de __________
b) Ao mesmo tempo, o valor de $m(t)$ está se aproximando de ____________________

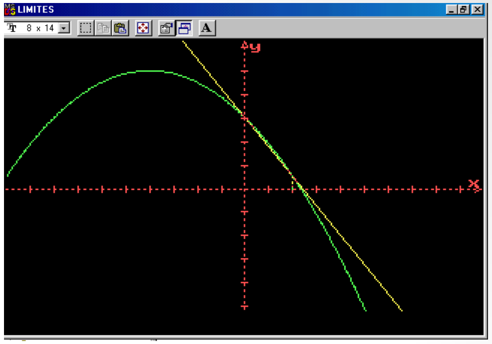
8- Com base no resultado anterior, complete a tabela, utilizando quatro casas decimais.

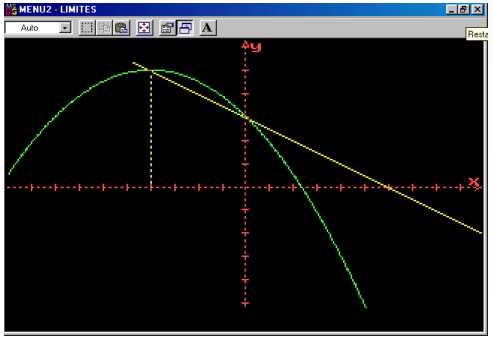
t	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.002
$m(t)$					

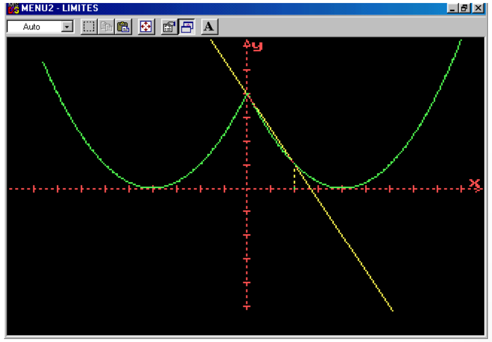
a) O valor de t está se aproximando de __________
b) Ao mesmo tempo, o valor de $m(t)$ está se aproximando de ____________________

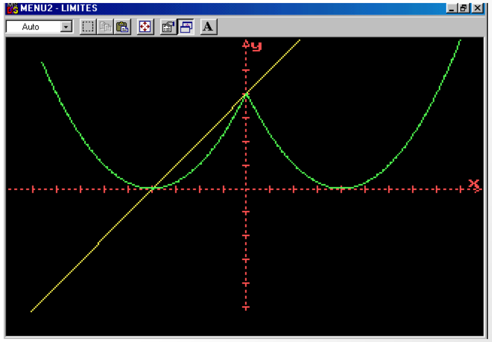
9- Calcule algebricamente $\lim_{t \to 0} m(t)$.

10- Qual o significado geométrico do resultado obtido na questão anterior?









10 ATIVIDADES
20 ITENS

Atividade 1 - Tarefa

Para responder às questões de 1 a 10, trabalharemos, inicialmente, com a função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e, em seguida, com a função $h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$.

1- Esboce o gráfico das funções dadas e descreva passo a passo seu procedimento.

Objetivo: Identificar variáveis pertinentes e procedimentos no traçado dos gráficos: pontuar, extensão do traçado e interpretação global.

Resultados Atividade 1 para função *f*:

<u>Apenas uma dupla do Grupo A usou procedimentos pontuais</u>.

Resultados Atividade 1 para função *h*:

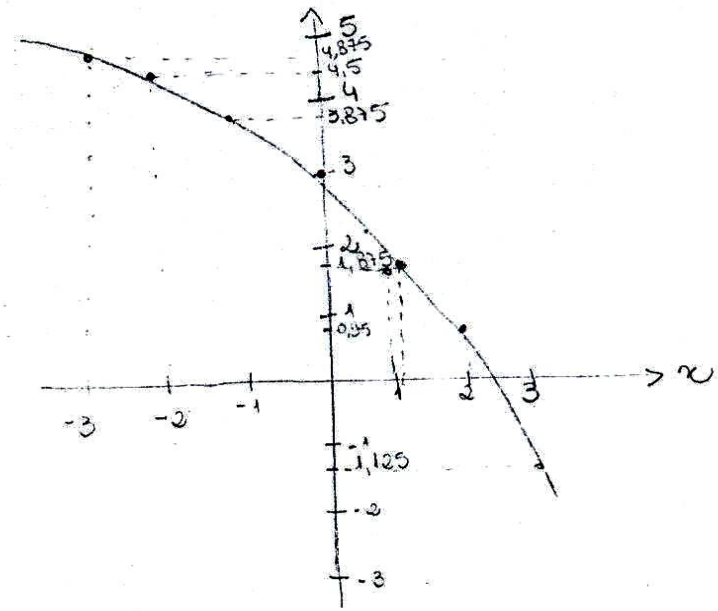
Grupo A e Grupo B: intervenções das pesquisadoras, optaram por utilizar a definição de módulo considerando x positivo $(x \geq 0)$obtendo, assim, parte de uma parábola. Ao considerar x negativo e substituindo $|x|$ por $-x$ obtiveram parte de outra parábola. Essas duas partes coincidem no ponto (0,4) e, a seguir, eliminaram as partes excedentes.

No Grupo B algumas duplas optaram pela construção de uma tabela de pontos, o que evidencia a influência desse procedimento, bastante valorizado na educação básica, no início do estudo de funções.

Atividade 1 - Tarefa

1) $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

x	$f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$	y
-3	$-\frac{9}{8} + 3 + 3 =$	4,875
-2	$-\frac{4}{8} + 2 + 3 =$	= 4,5
-1	$-\frac{1}{8} + 1 + 3 =$	3,875
0	$0 - 0 + 3 =$	3
1	$-\frac{1}{8} - 1 + 3 =$	1,875
2	$-\frac{4}{8} - 2 + 3 =$	0,95
3	$-\frac{9}{8} - 3 + 3 =$	- 1,125



– Atribuímos valores para o $\underline{\underline{x}}$ na $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e depois esboçamos o gráfico com os valores usados.
– Optamos por usar este método, por termos mais segurança com ele.

Protocolo da dupla Alunos AH da Questão 1 – P1

Atividade 1 - Tarefa

→ A parábola tem concavidade voltada para baixo, porque o valor do a é: $-\frac{1}{8}$

$f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

por apresentar um valor negativo, $a<0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo.

→ Neste gráfico podemos observar que no momento em que atribuímos 0 para o y, ou seja quando y=0 encontramos para x os seguintes valores aproximadamente

$x = 2,3245$ $\quad f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

$x = -10,325$

$y = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

$(-1)\; -x^2 - 8x + 24 = 0$

$x^2 + 8x - 24 = 0$ $\quad 0 = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+96}}{2}$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{160}}{2}$

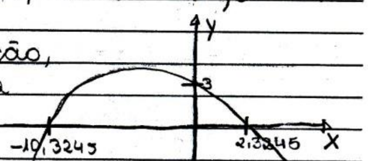
$x = \frac{-8 \pm 12,649}{2}$

$x' \cong -10,3245$

$x'' \cong 2,3245$

Ou seja no momento em que y=0 o x vale -10,3245 e 2,3245, em outras palavras, o gráfico desta função toca o eixo do x em 2,3245 e -10,3245.

As raízes dessa função, ou seja o gráfico toca o eixo do x quando este admite como valor



P(-10,3245, 0) P(2,345, 0)

x y x y

$x = -10,3243$ $y=0$

$x = 2,345$ $y=0$

→ Também podemos observar que no momento em que x=0 o valor que encontramos para y = 3.

1) $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

→ Fizemos a tabela de valores, ou seja atribuímos valores para x e y a fim de encontrarmos os pares ordenados que irão compor este gráfico que é de uma função do segundo grau, uma parábola.

$f(-2) = -\frac{4}{8} + 2 + 3 = 4,5$

$f(-3) = -\frac{9}{8} + 3 + 3 = 4,875$

$f(-1) = -\frac{1}{8} + 1 + 3 = 3,875$

$f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$

$f(-4) = -\frac{16}{8} + 4 + 3 = 5$

$f(-5) = -\frac{25}{8} + 5 + 3 = 4,875$

$f(-6) = -\frac{36}{8} + 6 + 3 = 4,5$

$f(-7) = -\frac{49}{8} + 7 + 3 = 3,875$

$f(-8) = -\frac{64}{8} + 8 + 3 = 3$

$f(-9) = -\frac{81}{8} + 9 + 3 = 1,875$

$f(-10) = -\frac{100}{8} + 10 + 3 = 0,5$

$f(-11) = -\frac{121}{8} + 11 + 3 = -1,125$

$f(1) = -\frac{1}{8} - 1 + 3 = 1,875$

$f(2) = -\frac{4}{8} - 2 + 3 = 0,5$

$f(3) = -\frac{9}{8} - 3 + 3 = -1,125$

Protocolo da dupla Alunos CD da Questão 1 – P1

Atividade 1 - Tarefa

01) $f(x) = \frac{-x^2}{8} - x + 3$

$\frac{-x^2}{8} - x + 3 = 0$

$-x^2 - 8x + 24 = 0$

$\Delta = 64 + 96$

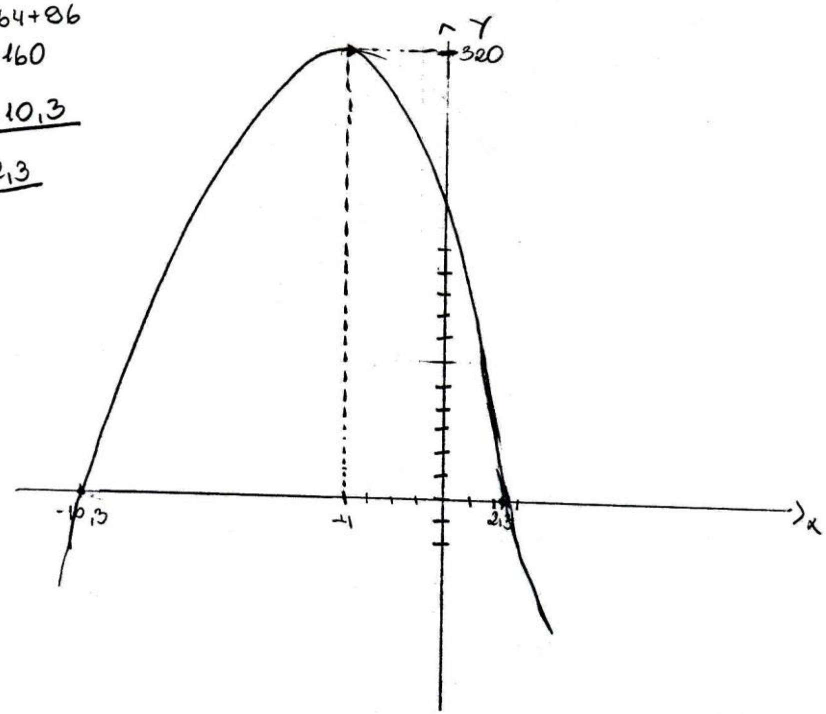
$\Delta = 160$

$x' = -10,3$

$x'' = 2,3$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(-\frac{1}{8})} = -4$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-160}{-4/8} = +320$



↳ Primeiro calculamos as raízes para sabermos onde a parábola corta o eixo x, após calculamos os vértices da parábola para sabermos onde é o ponto máximo que a concavidade da parábola atinge. E também vimos os intervalos $]-\infty;-4[$, $]-4;+\infty[$ para vermos onde ela cresce e decresce.

Protocolo da dupla Alunos IL da Questão 1 – P1

Atividade 2 - Tarefa

Para responder às questões de 1 a 10, trabalharemos, inicialmente, com a função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e, em seguida, com a função $h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$.

2- Usando o software GeoGebra, trace o gráfico das funções dadas.
a) Este gráfico coincide com o que você traçou anteriormente?
b) Se não for igual, quais foram as diferenças observadas?
c) Por que você acha que houve estas diferenças?
d) Se os gráficos não forem coincidentes, refaça-os explicando o que e por que mudaram.

3- Determine o domínio dessa função. Justifique sua resposta.

Objetivo da Atividade 2: Comparar as duas representações obtidas por meio de análise pontual ou global, mas também permitir o estabelecimento de relação globais.
Objetivo da Atividade 3: Observar se para a apresentação dessas respostas seria efetuada alguma distinção entre uma função apresentar o módulo e outra não.
Resultados Atividade 3 para função *h*:
Muitos acadêmicos precisaram recorrer a análise gráfica para constatar que essa função era definida para todos os números reais.

Atividade 2 - Tarefa

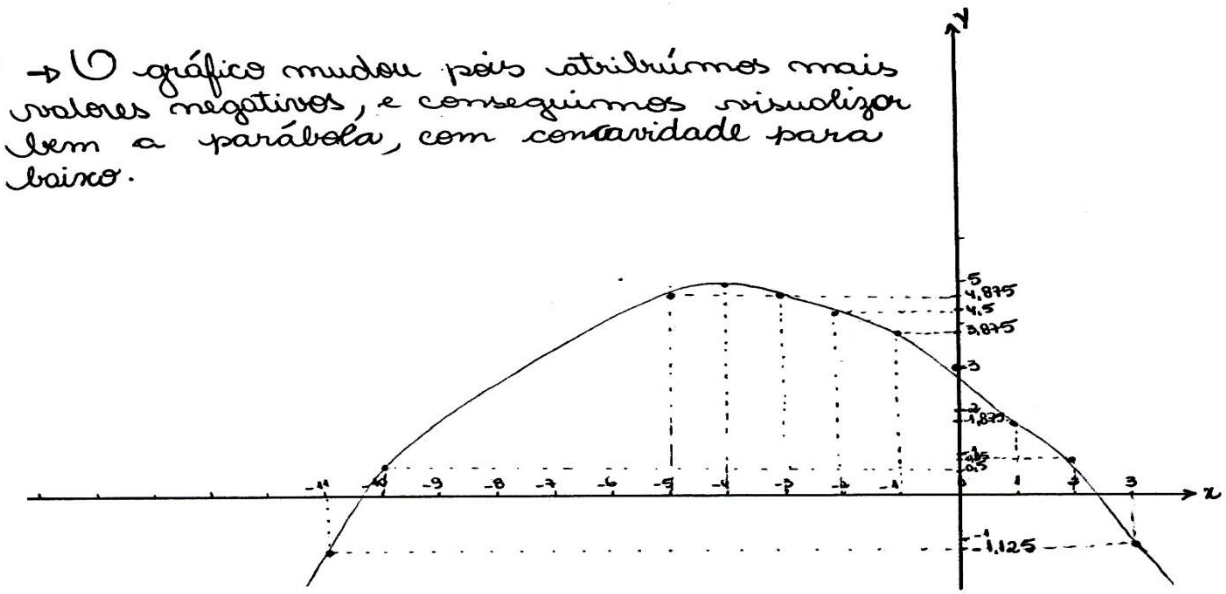
2) a) Em parte, nosso gráfico coincide.

b) Para nosso gráfico coincidir deveríamos ter atribuídos valores menores que -3, com isso teríamos mais pontos e assim seria coincidente.

c) Esta diferença ocorreu devido ao fato de termos usado uma tabela de valores, e atribuído poucos valores negativos.

Protocolo da dupla Alunos AH da Questão 2a, 2b e 2c – P1

→ O gráfico mudou póis atribuímos mais valores negativos, e conseguimos visualizar bem a parábola, com concavidade para baixo.



Protocolo da dupla Alunos AH da Questão 2d– P1

Atividade 4 e Atividade 5 - Tarefa

4- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $B(2, f(2))$.

a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e B.

b) Trace a reta AB. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AB. Vamos chamar essa inclinação de m.

5- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $C(-4, f(-4))$.

a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e C.

b) Trace a reta AC. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AC. Vamos chamar esta inclinação de m.

Objetivo da Atividade 4 e Atividade 5: Determinar o coeficiente de inclinação de duas retas, utilizando um tratamento de localização de posições por seleção de pontos para definir as retas *AB* e *AC*, sendo que o ponto A pertence às duas retas.

Esse procedimento pode ser realizado no Imagiciel e no GeoGebra. Entretanto, esses itens podem ser solucionados por meio da mobilização do registro algébrico (equação da reta que passa pelos dois pontos definidos) informado no "campo de entrada" do GeoGebra.

Atividade 4 e Atividade 5 - Tarefa

4- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $B(2, f(2))$.

a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e B.

b) Trace a reta AB. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AB. Vamos chamar essa inclinação de m.

5- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $C(-4, f(-4))$.

a) Insira na caixa de entrada do GeoGebra os pontos A e C.

b) Trace a reta AC. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AC. Vamos chamar esta inclinação de m.

Resultados Atividade 4 e Atividade 5 função f:

Grupo A: todos adotaram procedimentos semelhantes nesses dois itens, ou seja, tratamento de localização de posições por seleção de pontos, cálculo do valor do coeficiente por meio de um sistema linear.

Grupo B: a maioria usou a ferramenta do GeoGebra "reta definida por dois pontos", constatando a partir da "janela da álgebra" que a equação reduzida da reta AB é dada por: $y = -1{,}25x + 3$ e da reta AC dada por: $y = -0{,}5x + 3$.

Após isso, intervenção das pesquisadoras verificou as soluções por meio do cálculo do coeficiente de inclinação da reta, dado por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Uma dupla fez o caminho inverso: determinou, primeiramente, os coeficientes de inclinação e linear da reta, em seguida, digitou a equação reduzida no "campo de entrada" do GeoGebra, comprovando que a reta passa pelos dois pontos dados.

Atividade 4 e Atividade 5 - Tarefa

$y = ax + b$ (0,3) $\quad$ (0,3) (2, 1/2)

$3 = 0 + b$ $\quad$ $y = ax + b$

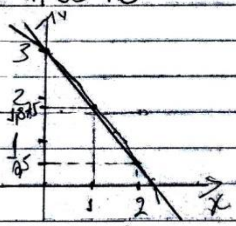
$\boxed{b=3}$ $\quad$ $\frac{1}{2} = 2a + 3$

$1 = 4a + 6$

$y = ax + b$ $\quad$ $4a = 1 - 6$

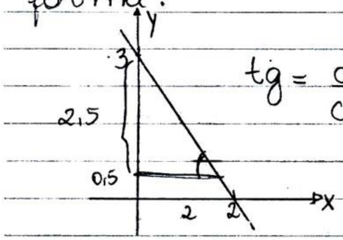
$y = -1,25 + 3$ $\quad$ $4a = -5$

$a = -1,25$



Sabendo que uma reta pode ser determinada por 2 pontos, pegamos os pontos que nos foram dados (0,3), (2, 1/2) e substituímos na equação geral da reta $y=ax+b$. Nossa reta tem como lei da função $y=-1,25x+3$. Observamos que o valor do a é $-1,25$, sabendo que o coeficiente do a é o coeficiente angular da reta, podemos dizer que m = coeficiente angular é igual a $-1,25$, por ser negativo, com certeza essa reta é decrescente, como podemos verificar no esboço do gráfico.

Podemos encontrar a equação da por esta outra forma.



$tg = \frac{cat\,op}{cat\,adj} = -\frac{2,5}{2} = -1,25 \rightarrow a$

Sabendo que o coeficiente do a determina o coeficiente angular da reta (m) $\rightarrow$ $y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + b$

Sabendo também que exatamente no ponto em que a reta corta o eixo do y é valor do b. Podemos ver que a reta corta o 3 no eixo do y, podemos então dizer que b=3.

$y = ax + b$

$y = -1,25x + 3$

Protocolo da dupla Alunos CD da Questão 4– P1

Atividade 4 e Atividade 5 - Tarefa

1 $A(0)\,f(0)$ e $B(2, f(2))$

$x_3, y_3 \rightarrow (0, 3)$

$x_4, y_4 \rightarrow (2, 0{,}5)$

$$m = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \frac{3 - 0{,}5}{0 - 2} = \frac{-2{,}5}{2} = -1{,}25 \quad \boxed{m = -1{,}25}$$

$x_3, y_3 \rightarrow (0, 3)$

$x_4, y_4 \rightarrow (-4, 5)$

$$m = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \frac{(3 - 5)}{0 + 4} = \frac{-2}{+4} = -0{,}5 \rightarrow \boxed{m = -0{,}5}$$

Protocolo da dupla Alunos FJ da Questão 4 e 5– P1

Atividade 4 - Tarefa

Protocolo da dupla Alunos CD da Questão 4– P2

(2, 1) (0, 4)

x y
(2,1)

$y = ax + b$

$1 = 2a + b$

$2a + b = 1$

$2a + 4 = 1$

$2a = 1 - 4$

$2a = -3$

$\boxed{a = -\frac{3}{2}}$

x y
(0,4)

$y = ax + b$

$4 = 0 + b$

$\boxed{b = 4}$

$y = ax + b$

$y = mx + b$

↳ m é o coef. angular

$y = -\frac{3}{2}x + 4$

Porque o valor do coef. do x ser negativo a reta é decrescente.

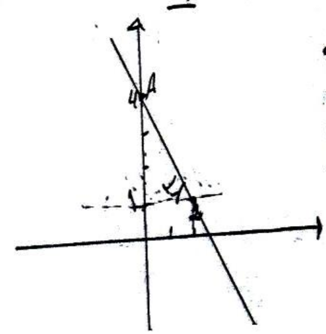
Por isso que a reta dg a função é decrescente nestes pontos

$A(0, f(0)) = (0,4)$

$f(0) = \left(\frac{0}{2} - 2\right)^2 = (0-2)^2 = (-2)^2 = \underline{4}.$

$B(2, f(2)) = (2,1)$

$f(2) = \left(\frac{2}{2} - 2\right)^2 = (1-2)^2 = (-1)^2 = \underline{1}$



$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\alpha = \frac{-3}{2}$

$\alpha = -1,5 \Rightarrow \alpha = \underline{56^\circ\ 18'\ 35.76''}$

Protocolo da dupla Alunos EK da Questão 4– P2

Atividade 6 - Tarefa

6- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $M(t, f(t))$, $t \in \Re$.

a) Trace a reta AM. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AM.

b) O valor obtido é um número ou o resultado depende de t?

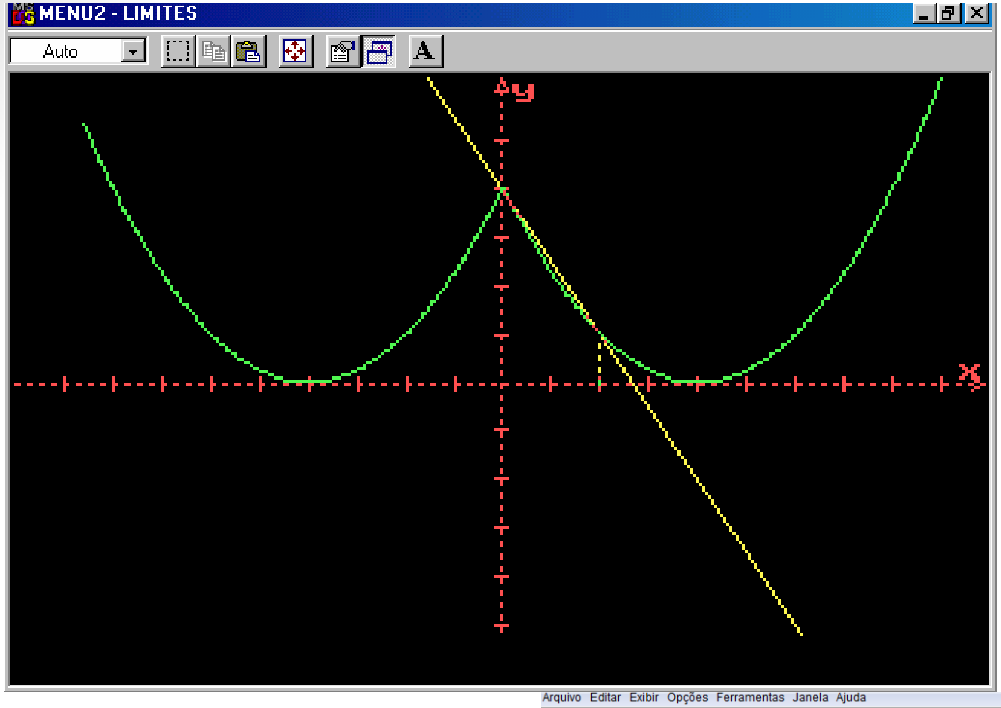
c) Se for um número indique-o por m; se depende de t, indique-o por $m(t)$. Justifique sua escolha.

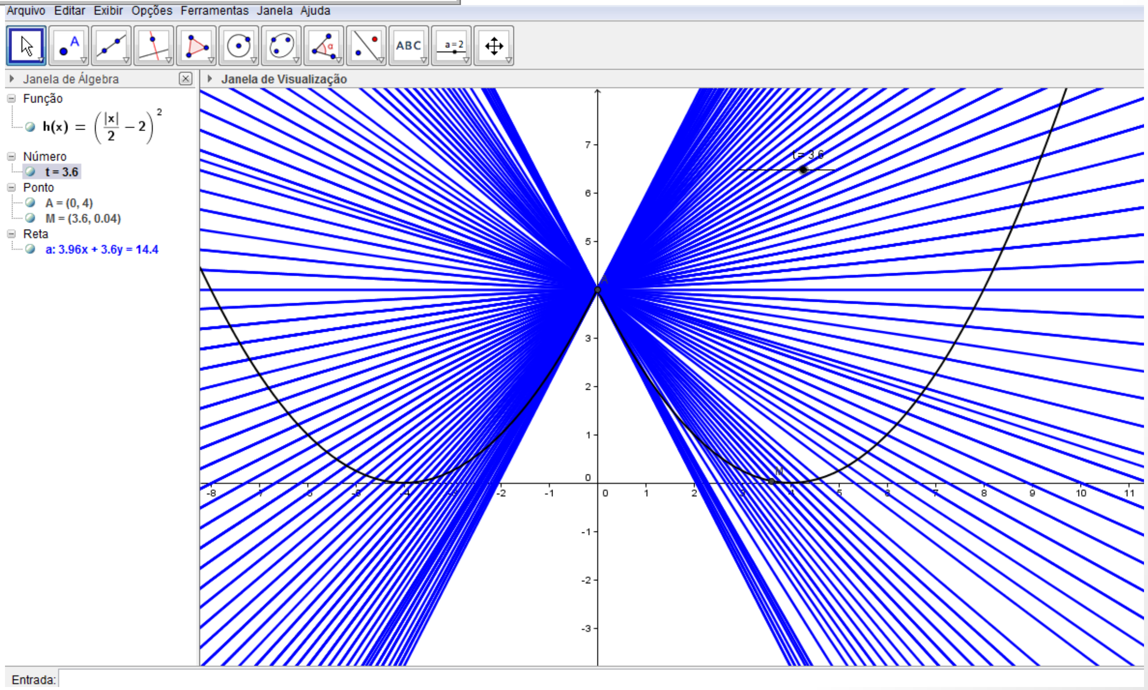
Objetivo da Atividade 6: Calcular a inclinação de retas secantes passando pelo ponto $\boldsymbol{A(0, f(0))}$, fazendo variar o outro ponto denominado por $\boldsymbol{M(t, f(t))}$.

Explorar, graficamente, algebricamente e numericamente, a existência ou não da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa zero, discutindo o conceito de derivada da função em um ponto por aproximações de retas secantes.

-Imagiciel a partir do Menu Limites disponibilizava com o esboço do gráfico da função uma reta secante que podia ser movimentada, permanecendo fixo o ponto de abscissa zero.

-GeoGebra: pode-se utilizar a ferramenta "controle deslizante", na qual é inserida uma variável, nesse caso , e por meio da alteração do valores de constroem-se infinitas retas secantes a função dada.


MENU2 - LIMITES
Auto
y
x


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
ABC
Janela de Álgebra
Janela de Visualização
Função
h(x) = (|x|/2 − 2)²
Número
t = 3.6
Ponto
A = (0, 4)
M = (3.6, 0.04)
Reta
a: 3.96x + 3.6y = 14.4
Entrada:

Atividade 6 - Tarefa

6- Considere os pontos $A(0, f(0))$ e $M(t, f(t))$, $t \in \Re$.

a) Trace a reta AM. Calcule a inclinação (ou coeficiente angular) da reta AM.

b) O valor obtido é um número ou o resultado depende de t?

c) Se for um número indique-o por m; se depende de t, indique-o por $m(t)$. Justifique sua escolha.

Resultados Atividade 6 :

Grupo A: muitas dúvidas e questionamentos relacionados ao reconhecimento da variável t.

Grupo B: utilizaram a ferramenta "controle deslizante", na qual é inserida uma variável, o que contribuiu para verificarem, rapidamente, que o valor obtido para o coeficiente de inclinação da reta depende de t. No entanto, não conseguiram determinar, rapidamente, a expressão que representa $m(t)$, sendo necessária a intervenção das pesquisadoras.

<u>Em relação à função h</u>, todos verificaram que essa função possui duas expressões distintas, ou seja, $m(t) = \frac{t}{4} - 2$ se $t \geq 0$, e $m(t) = \frac{t}{4} - 2$ se $t < 0$.

Atividade 7 e Atividade 8 - Tarefa

7- Com base no resultado anterior, complete a tabela, utilizando quatro casas decimais.

t	2	0.5	0.1	0.01	0.002
$m(t)$					

a) O valor de t está se aproximando de ___________

b) Ao mesmo tempo, o valor de $m(t)$ está se aproximando de _______________________

8- Com base no resultado anterior, complete a tabela, utilizando quatro casas decimais.

t	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.002
$m(t)$					

a) O valor de t está se aproximando de ___________

b) Ao mesmo tempo, o valor de $m(t)$ está se aproximando de _______________________

Objetivo da Atividade 7 e Atividade 8: Aproximar de zero por valores numéricos pontuais, tanto pela direita como pela esquerda, acarretando uma aproximação de coeficientes de inclinação de retas secantes ao gráfico das funções f e h.

Resultados Atividade 7 e Atividade 8:

Constataram que na medida que t se aproxima de zero, tanto por valores maiores como menores, a expressão $m(t) = -\frac{t}{8} - 1$ para a função f aproxima-se de -1.

Para a função h, verificaram que esses valores são distintos, pois , $m(t) = \frac{t}{4} - 2$ se $t \geq 0$, aproxima-se de -2 e $m(t) = \frac{t}{4} - 2$ se $t < 0$ aproxima-se de $+2$, embora as funções sejam contínuas em todos os pontos, inclusive no ponto de abscissa zero.

Atividade 9 - Tarefa

Para responder às questões de 1 a 10, trabalharemos, inicialmente, com a função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e, em seguida, com a função $h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$.

9- Calcule algebricamente $\lim_{t \to 0} m(t)$.

Objetivo da Atividade 9:
Verificar entendimentos no cálculo do limite de m(t) quando t tende a zero.

Resultados Atividade 9:
Os acadêmicos de ambos os grupos responderam corretamente que o limite de $m(t)$, quando t tende a zero da função f existe e é dado por -1, pois os limites laterais são iguais.
Em relação à função h, os acadêmicos do Grupo A calcularam algebricamente os limites laterais e concluíram que ele não existe, pois os limites laterais são diferentes.
Já os acadêmicos do Grupo B calcularam algebricamente os limites laterais, mas não apresentaram nenhuma conclusão quanto a existência ou não do limite.

Atividade 9 - Tarefa

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{4} - 2 = \boxed{-2}$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{4} + 2 = \boxed{2}$

Esta função é dividida em duas partes é uma função modular qdo o x tende a zero não exíste limite pois calculamos um pela esquerda e um pela direita então encontramos duas respostas neste caso qdo tende a zero pela direita encontrei -2 e pela esquerda 2.

Protocolo da dupla Alunos IL da Questão 9– P2

Atividade 10 - Tarefa

Para responder às questões de 1 a 10, trabalharemos, inicialmente, com a função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e, em seguida, com a função $h(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$.

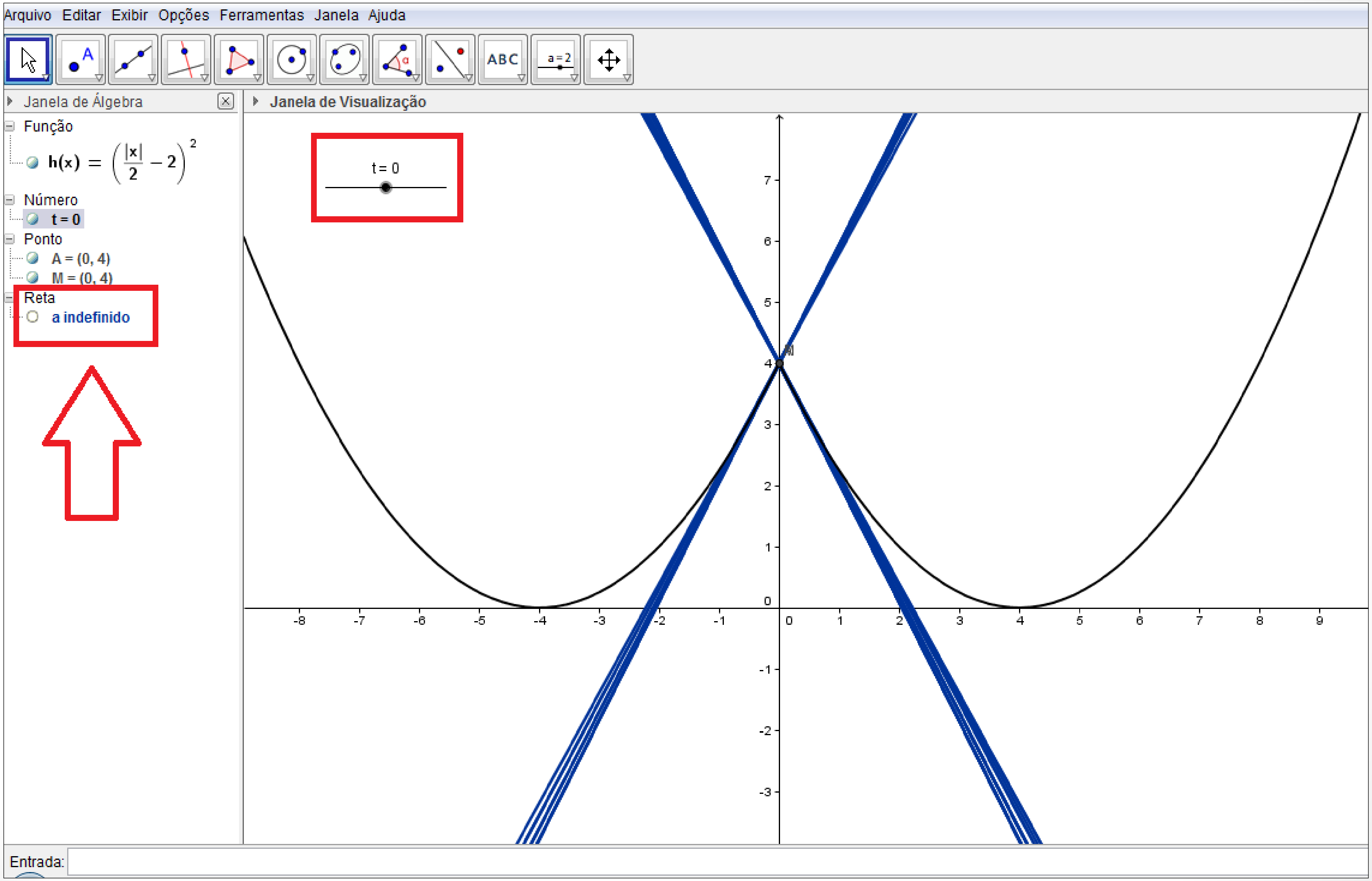
10- Qual o significado geométrico do resultado obtido na questão anterior?

Resultados Atividade 10:

Após intervenções das pesquisadoras, compreenderam que o significado geométrico do $\lim_{t \to 0} m(t)$, na primeira parte da sequência, estava relacionado com a derivada da função f, no ponto de abscissa zero.

Mas, no que tange à função h verificamos que alguns acadêmicos não perceberam que não existe derivada no par ordenado $(0, f(0))$, mesmo constando na "janela da álgebra" do GeoGebra que, quando t tende a 0, a equação da reta, a curva, tem coeficiente de inclinação indefinido. Talvez isso tenha acontecido porque os acadêmicos do Grupo B não constataram que o $\lim_{t \to 0} m(t)$ não existe ao resolverem o item 8.

Atividade 10 - Tarefa



Atividade 10 - Tarefa

$\lim_{x \to 0} -\frac{x}{8} - 1 = \frac{0}{8} - 1 = \boxed{-1}$

Os números que atribuímos a função tanto no
tanto oito quanto no nove os valores se aproximavam -1
isto acontece qdo a função é a mesma tanto pela direita,
quanto pela esquerda.

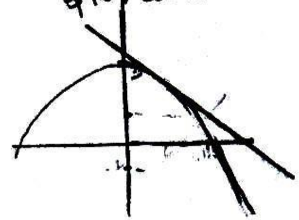
$f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$

$f'(x) = -\frac{2x}{8} - 1$

$f'(0) = -1$

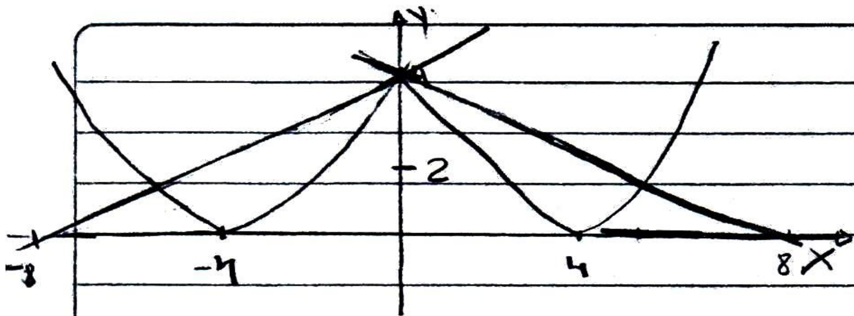
$(-1, -1)$

-1 é o coeficiente angular da reta tangente da função $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$, pois ao calcularmos $f'(0)$ encontramos -1, porque, a reta é decrescente



Protocolo da dupla Alunos IL da Questão 10– P1

Atividade 10 - Tarefa



$\frac{x}{4} + 2$ se $x < 0$

$\frac{x}{4} = -2$ $(-8,0)$

$x = -8$

$\frac{x}{4} - 2 = 0$ $x \geq 0$

$\frac{x}{4} = 2$ $(8,0)$

$\boxed{x = 8}$

Pelo ponto (0,4) percebemos que passam infinitas retas, por este motivo a função não tem limite e derivada.

Protocolo da dupla Alunos CD da Questão 10–P2

Considerações Finais - Tarefa

-Argumentações: revelaram a coordenação dos registros de representação;

-No decorrer deste estudo passaram a conter mais detalhes e cuidado com o rigor, o que revela um ambiente de produção e negociação de significados das palavras e dos símbolos utilizados;

-Os softwares Imagiciel e GeoGebra: mediadores de uma discussão matemática, contribuindo para o desenvolvimento da aprendizagem;

- O Imagiciel possuía limitações quanto ao trabalho com as várias representações, pois apresentava apenas o registro gráfico de funções previamente estabelecidas, levando os acadêmicos do Grupo A, em muitas situações, a ficarem "presos" ao registro numérico;

- O GeoGebra permitiu explorar a ideia organizada pelo Imagiciel para uma quantidade ilimitada de funções, bem como explorar simultaneamente as várias representações (gráfica, numérica, algébrica e tabular).

Outros estudos do **EMgep** ...

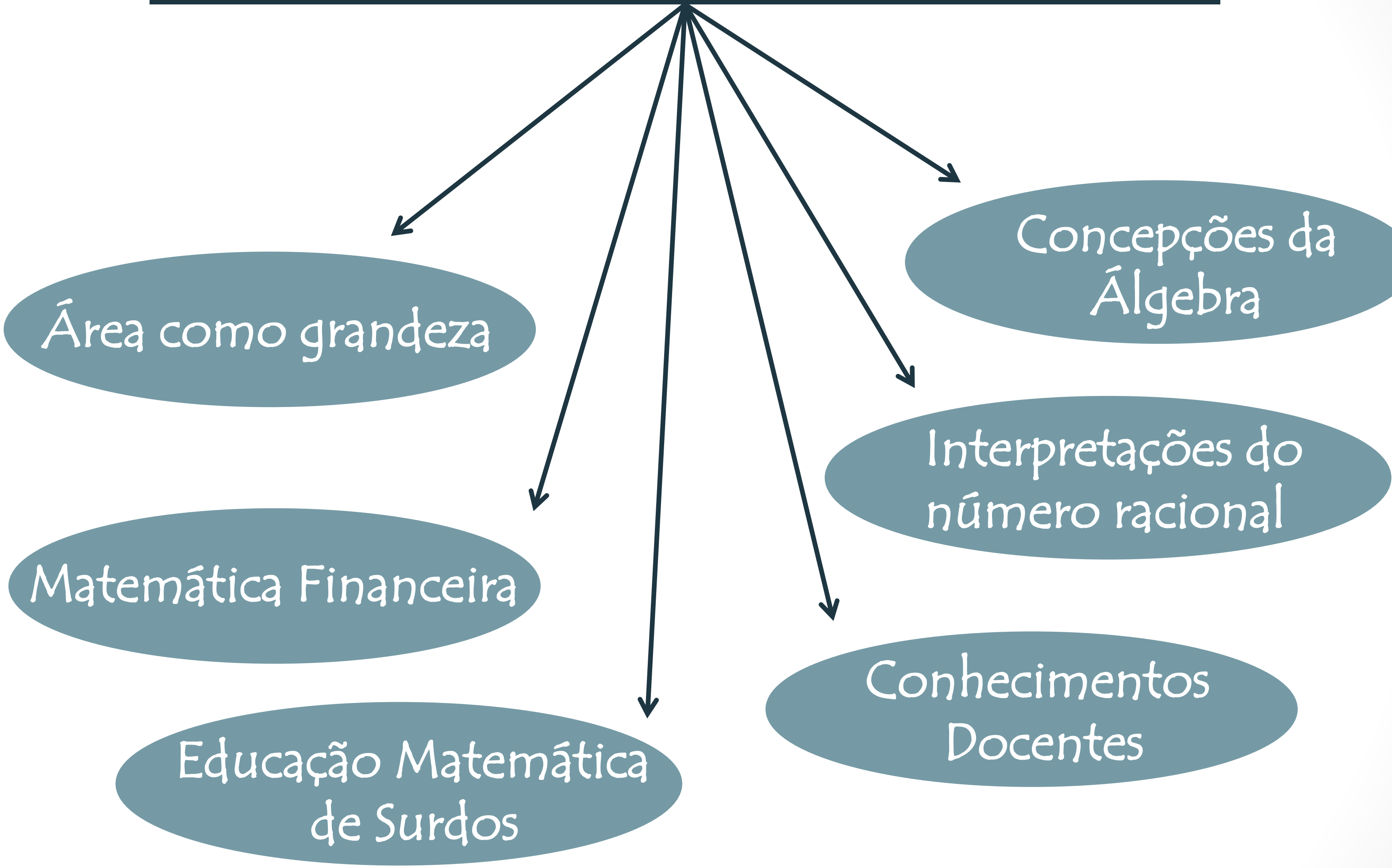
Geometria Plana - Geometria Espacial - Geometria Analítica

Matemática Financeira - Análise Combinatória

Números Racionais - Álgebra Escolar - Sistemas Lineares -

Números Reais - Função - Limite - Derivada

Registros de Representação Semiótica



EMgep/UFSM

OBMEP 2017 NÍVEL 2 | 3

14. Pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 2. Qual é a área do quadrado *ABCD* da Figura 2?

A) 16 cm²
B) 25 cm²
C) 36 cm²
D) 49 cm²
E) 64 cm²

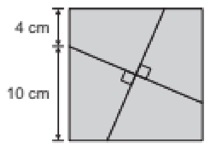


Figura 1

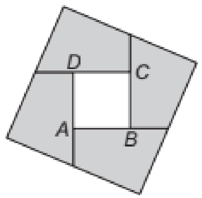


Figura 2

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APREENSÕES FIGURAIS MOBILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE ÁREA DE QUADRILÁTEROS A PARTIR DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Apprehensions mobilized by graduates in Mathematics: a study on the area of quadrilaterals from GeoGebra

Juliana Gabriele KIEFER
Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
juliana_kiefer@hotmail.br
https://orcid.org/0000-0003-4912-5747

Inês Farias FERREIRA
Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
inesfferreira10@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3930-4728

Rita de Cássia Pistóia MARIANI
Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
rcpmariani@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-8202-8351

ATIVIDADE II - EXPLORANDO QUADRILÁTEROS (Adaptado de Obmep, 2017, Q14, N2, F1)

7) Abra e analise o ARQUIVO 7. Selecione a caixa IMAGEM 7 e responda:

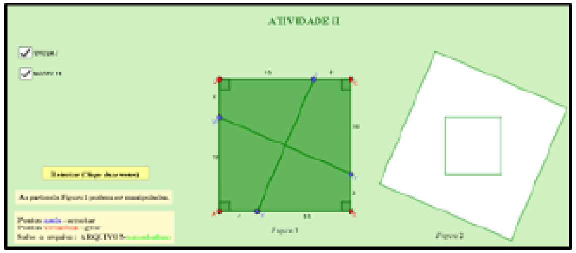
7a) Descreva o que você observa na Figura 1.

7b) Qual é a área dessa figura? Descreva, com detalhes, como você a obteve.

8) O que você pode afirmar sobre cada quadrilátero que compõem a Figura 1? Clique duas vezes no botão REINICIAR para voltar a configuração inicial.

9) O que você pode afirmar sobre a figura geométrica formada pelos pontos XYZW? Argumente matematicamente.

10) Qual é a posição relativa aos segmentos XZ e YW? Justifique matematicamente.



11) Clique na IMAGEM 11. Rearranje os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2, conforme as instruções:

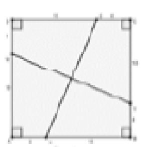
- Devem ser utilizadas todas as peças;

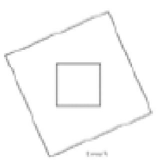
- Não pode ter sobreposição;

- O quadrado interno da Figura 2 não pode ser preenchido.

Responda:

11a) Represente na figura abaixo todos os movimentos que você realizou para rearranjar os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2.





11b) Qual é a área do quadrado ABCD da Figura 2? Justifique sua resposta apontando argumentos.

11c) Qual é a área total da Figura 2?

(KIEFER, FERREIRA, MARIANI, 2020)

emd Ensino de Matemática em Debate

https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i1p105-129

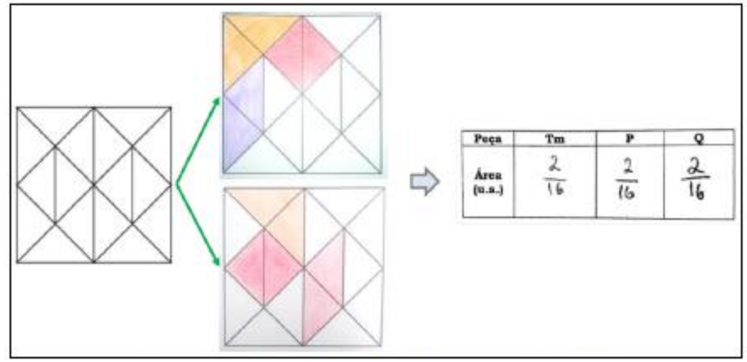
Números reais no contexto de uma comunidade escolar surda: um estudo com ênfase em registros figurais

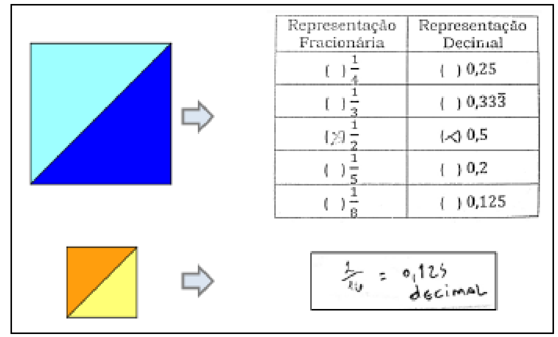
Real numbers in environment of a deaf school community: a study with emphasis on figural registers

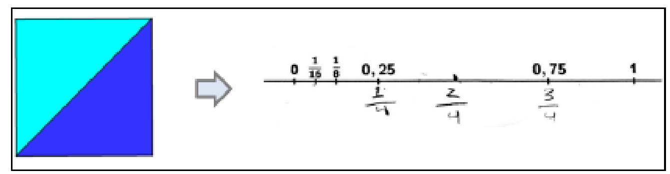
Lucas José de Souza[1]

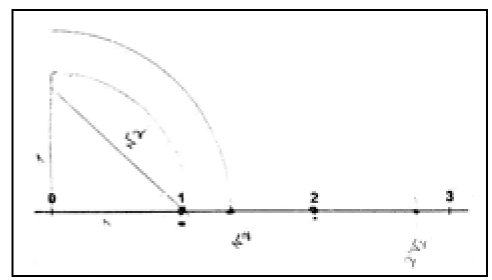
Rita de Cássia Pistóia Mariani[2]

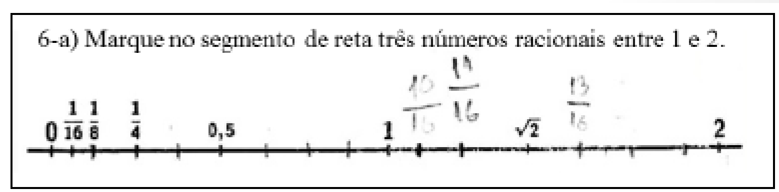
Conjuntos		Tarefa	Representação	Conceito/conteúdo
Conjuntos	Racionais	T1 (15 atividades)	Fracionária	A unidade de área foi definida como o quadrado formado pelas sete peças do tangram, foram disponibilizadas representações icônicas desse formato em fichas impressas da tarefa, com medidas idênticas as do material. A área de cada peça foi determinada de forma independente, na seguinte ordem Tg, Tm e Tp, estabelecendo a decomposição do contorno quadrado segundo as formas das peças
		T2 (05 atividades)		Exploramos as peças P, Q e novamente Tm, pela congruência de áreas. Como registro de partida foi fornecida uma representação icônica do quadrado unitário dividido em dezesseis triângulos, no intuito de identificar as formas das peças Tm, Q e P como distintas organizações feitas com duas peças Tp
		T3 (06 atividades)	Geométrica e icônica	Iniciamos abordagens ao sistema representativo geométrico, nas quais foram estabelecidas representações fracionárias de áreas de peças, por exemplo $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$, como pontos em um segmento de reta
		T4 (06 atividades)	Fracionária, decimal e percentual	Tomaram protagonismo as representações numéricas decimais, pela conversão baseada em algoritmos de divisão, e percentuais, envolvidas nos enunciados da tarefa como taxa para redução de áreas de quadrados
	Irracionais	T5 (04 atividades)	Numérica e geométrica	Produziram-se números irracionais ($\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$) a partir de medidas de lados analisadas no tangram, o que envolveu a desconstrução dimensional, por explorar figuras planas (bidimensionais) analisadas unidimensionalmente. Para tanto, a unidade de área foi alterada para a peça Q
	Reais	T6 (03 atividades)	Geométrica	Utilizamos um livro didático (SMOLE; DINIZ, 2005) disponível na biblioteca da EEEERFC, fornecido pelo PNLEM (2009-2011). Abordamos a (ir)racionalidade de números, a partir do estudo proposto na obra, além de princípios da relação de densidade e completude. Esse material não foi produzido para estudantes surdxs, nesse prisma, foram necessárias traduções para língua de sinais de todas suas informações
		T7 (03 atividades)	Geométrica e icônica	Construímos a espiral de Teodoro (ou pitagórica) com apoio de régua e compasso, para tanto o teorema de Pitágoras foi utilizado. Exploramos tratamentos algébricos e numéricos, com o auxílio da calculadora para efetuar operações, que possibilitaram conversões de representações icônicas em numéricas











(SOUZA, MARIANI, 2020)

VIDYA, v. 38, n. 1, p. 109-128, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018. ISSN 2176-4603

APREENSÕES MOBILIZIDAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

APPREHENSIONS MOBILIZED IN THE STUDY OF THE AREA OF THE CIRCLE BY 9TH-GRADE STUDENTS OF LOWER SECONDARY EDUCATION

PRISCILA ARCEGO*
RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI**

(ARCEGO, MARIANI, 2018)

1) Vamos seccionar os círculos em setores circulares congruentes!
Divida e recorte o círculo rosa em 8 setores circulares congruentes, o círculo azul em 16 e o vermelho em 32.
1-a) Conte com suas palavras como você obteve os 32 setores circulares congruentes.
1-b) Seccione ao meio apenas um dos setores circulares de cada um dos três círculos que foram divididos.
1-c) Monte três novas figuras com todas as peças de cada círculo. Cada figura deve utilizar somente peças da mesma cor e se aproximar de um retângulo.
1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?
1-e) O que ocorreria se os círculos fossem divididos em um número cada vez maior de setores circulares e esses setores fossem utilizados para montar figuras aproximadas de retângulos? Justifique sua resposta.
1-f) Como todos os círculos tem o mesmo tamanho então todos tem a mesma área. Se você constitui figuras que se aproximam de um retângulo com todas as peças de cada círculo o que você pode afirmar sobre a área das figuras formadas? Justifique sua resposta.
1-g) Como você calcularia a área da figura formada pela secção de 32 setores circulares se ela se aproxima de um retângulo? Explique com detalhes o que você pensou e indique uma expressão algébrica.

2) Analise o *Applet 1_Área.* Nesse *applet* você pode modificar a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo utilizando o controle deslizante indicado por *n*.
2-a) Na atividade anterior você seccionou o círculo em até 32 setores circulares congruentes. Em quantas partes esses círculos podem ser seccionados no *Applet 1_Área*?
2-b) Com os círculos coloridos da atividade anterior você montou uma figura que se aproximava de um retângulo. O fato de seccionar o círculo em uma quantidade maior de partes acarretou na formação de que figura geométrica no *Applet 1_Área*? Por que você considera que essa ideia é correta?
2-c) Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?
2-d) E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?
2-e) A partir da identificação da base e da altura da figura formada expresse uma fórmula para calcular a área do círculo a partir do retângulo formado.
2-f) É possível utilizar essa expressão e calcular a área de qualquer círculo a partir de sua reconfiguração em um retângulo? Por quê?
2-g) Você já havia estudado esta expressão anteriormente? Em caso afirmativo descreva como você aprendeu a área do círculo.

DESAFIOS

Superar o enclausuramento de registros;

Valorizar o registro gráfico e figural;

Transformar os pressupostos teóricos dos RRS em elementos orientadores de encaminhamentos didáticos.

Referências

ARCEGO, P. MARIANI, R. C. P. Apreensões mobilizadas no estudo da área do círculo por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Revista: VIDYA- Santa Maria/RS, 2018 , v. 38, n. 1, jan./jun., 2018

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, v.6, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011. Disponível em <www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.Acesso em 14 out. 2016.

DUVAL, R. Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Entrevistadores: José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul./dez. 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento **Revemat**, v.7, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica, Campinas(SP):Papirus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma**: Entrar no Modo Matemático de Pensar: os Registros de Representações Semióticas. Organização Tania M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

KIEFER, Juliana Gabriele; FERREIRA, Inês Farias; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Apreensões figurais mobilizadas por licenciandos em matemática: um estudo sobre área de quadriláteros a partir do software GeoGebra. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-19, abr. 2020. ISSN 1981-1322.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Cortez, 1995.

MARIANI, R.C.P. **A transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo.** Tese de doutorado, PUC/SP, 2006.

MARIANI, R.C.P.; SOARES, M.A.S.S. Derivada: uma análise dos registros mobilizados por licenciando em Matemática ao resolverem situações a partir da manipulação do software Imagiciel e GeoGebra. BONOTTO, D. L. et al. (org)**Processos Formativos**: caminhos e perspectivas na formação de professores . UFFS/Polimpressos Gráficos Ltda: Cerro Largo/RS, 2015, p. 239-260.

MORETTI, M. T.;THIEL, A. A. O ensino de matemática hemético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, Paraná, v.7, n.2, p.379-396, 2012.

SOUZA, Lucas José de; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Números reais no contexto de uma comunidade escolar surda: um estudo com ênfase em registros figurais. **Ensino da Matemática em Debate**, [S.l.], v. 7, n. 1, p. 105-129, abr. 2020.