A CARACTERÍSTICA DE EULER PARA TEORIA DE GRAFOS

Silvio Cavalcanti Bonfim, Beatriz Gomes da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
silviocavalcanti@outlook.com, biagomez.123@outlook.com

XX SEMANA DE MATEMÁTICA

Introdução

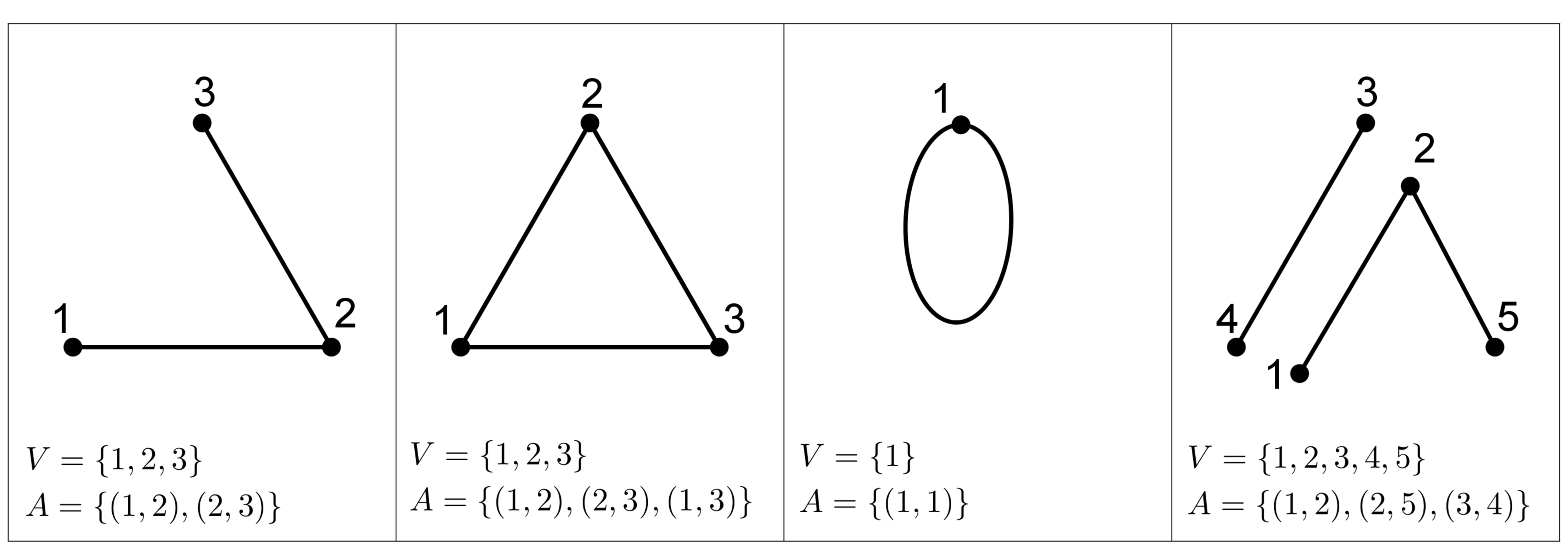
A Teoria de grafos é um ramo da matemática que estuda a relação entre objetos de um determinado conjunto. O estudo dessa teoria deu-se início com o matemático suiço Leonhard Euler por volta de 1736 através do problema das pontes de Konigsberg que, no seculo XVIII, consistia em um conjunto de sete pontes que cruzava o rio Pregel conectando duas ilhas entre si. Por muito tempo os habitantes perguntavam-se se era possível passar por todas as pontes em uma caminhada continua sem passar duas vezes por qualquer uma das pontes.
A característica de Euler-Poincaré ou simplesmente característica de Euler, foi utilizada inicialmente para poliedros e teve fundamental papel para demonstração de diversos resultados da geometria que foram descobertos posteriormente. Além disso a característica de Euler também foi usada para classificar os poliedros de Platão e atualmente é muito utilizada em topologia algébrica e homologia. O objetivo desse trabalho é demonstrar a característica de Euler para teoria de grafos relacionando vértices, arestas e circuitos.

Conceitos básicos de Grafos

Grafos são usados para estudar relações entre os objetos de um determinado conjunto, por exemplo representar árvores genealógicas e graus de parentescos no qual os vértices são os indivíduos e as arestas são os parentescos. A definição a seguir nos entrega de forma matemática o que vem a ser um grafo.

Definição 1 Chamamos de grafo o par $G = (V, A)$ em que $V = V(G)$ é um conjunto finito não vazio de vértices e $A = A(G)$ é um subconjunto de $V \times V$ chamado de conjunto de aresta.

Um *caminho de comprimento r* ou apenas *caminho* é um subconjunto do conjunto de arestas da forma $\{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \ldots, (v_{i_{r-1}}, v_{i_r})\}$. Quando o primeiro vértice da primeira aresta e o segundo vértice da ultima aresta são iguais chamamos o caminho de *circuito*. Um grafo G é dito conexo se dado um par qualquer de vértices em G, existe pelo menos um caminho entre eles. Chamamos de laço arestas do tipo (v, v). Um grafo é simples se é conexo e não possui laços e uma árvore é um grafo simples que não possui circuitos.



Exemplos de grafos.

Teorema 1 O número de arestas de uma árvore com n vértices é $n - 1$.

Demonstração: Para demonstrar o resultado procedemos por indução finita sobre o número de vértices de G. Sejam $G = (V, A)$ um grafo do tipo árvore se G possui um único vértice nada temos que mostrar.
Suponha que G tenham k vértices e considere $u, v \in V$ tal que $(u, v) \in A$. Sabemos, pela definição de árvore, que G não possui circuitos, isto posto ao retirarmos a aresta (u, v) separamos em um par de árvores G_1 e G_2 o grafo G. Suponha que K_1 e k_2 são as quantidades de vértices dos grafos G_1 e G_2 respectivamente. Então, por hipótese de indução o número de arestas de G_1 e G_2 são $k_1 - 1$ e $k_2 - 1$ respectivamente.
Portanto se acrescentarmos a aresta (u, v) novamente teremos que o número de arestas de G é dado por $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = k_1 + k_2 - 1$. Como $k_1 + k_2 = k$ concluímos que G tem $k - 1$ arestas.

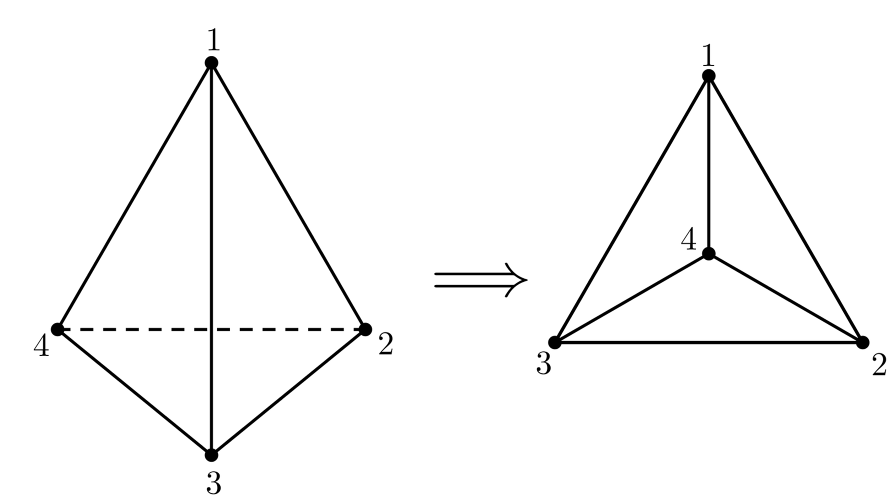
Característica de Euler para grafos

Definição 2 Seja $G = (V, A)$ um grafo então a característica de Euler de G, denotada por $\chi(G)$, é a diferença entre a quantidade de vértices e a quantidade de arestas.

O teorema a seguir relaciona a característica de Euler de um grafo qualquer com a sua quantidade de circuitos. Esse teorema será utilizado posteriormente para a demonstração do resultado principal desse trabalho.

Teorema 2 A característica de Euler de um grafo com a quantidade c de circuito é $1 - c$.

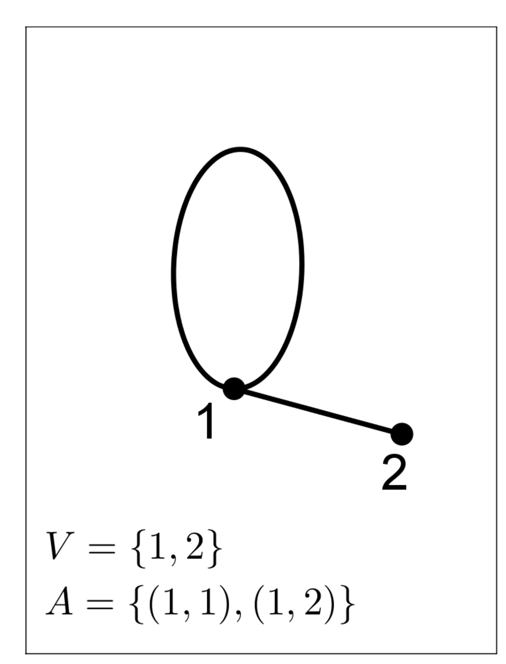
Demonstração: Seja $G = (V, A)$ um grafo com c circuitos. Se retirarmos uma aresta de cada circuito obtemos um novo grafo G' do tipo árvore com a mesma quantidade de vértices de G porém com c arestas a menos que G. Logo $\#A(G) = \#A(G') + c$ e pelo Teorema 1 $\#A(G') = \#V(G) - 1$. Então $\chi(G) = \#V(G) - \#A(G) = \#V(G) - (\#A(G') + c) = \#V(G) - (\#V(G) - 1 + c) = 1 - c$ concluindo a demonstração.
Um grafo G é planar se admite uma representação gráfica no plano na qual linhas que representam arestas diferentes não se intersectam, a não ser nos extremos, no caso das arestas serem incidentes num ou mais vértices em comum. Em um grafo planar G o número de faces é a quantidade de circuitos de sua representação planar e a região infinita.



Exemplo de grafo com representação planar.

Teorema 3 (Característica de Euler para Grafos Planares) Se G é um grafo planar conexo com V vértices, A arestas e F faces em uma representação planar, tem-se $V - A = 2 - F$.

Demonstração: Observe que se G não tem circuito então G é uma árvore e portanto tem V vértices, $V - 1$ arestas e 1 face concluindo que $V - A = 2 - F$. Suponha que G tem ao menos um circuito então G tem pelo menos duas arestas. Para mostrar esse caso procedemos por indução sobre a quantidade de arestas.
Se G tem duas arestas, é conexo, planar e tem um circuito então G tem 2 vértices e 2 faces então $V - A = 2 - 2 = 0 = 2 - F$.



Caso em que o grafo possui duas aresta e um circuito.

Suponha que em todo grafo com A arestas temos a validade do resultado então seja G um grafo planar com $A + 1$ arestas, V vértices e F faces. Note que ao remover uma aresta de um dos circuitos de G obtemos um grafo G' com A arestas, V vértices e $F - 1$ faces. Por hipótese de indução em G' temos $V - A + F - 1 = 2$, logo para G temos

$$V - (A + 1) + F = V - A - 1 + F = V - A + F - 1 = 2$$

Isto é, $V - A = 2 - F$ concluindo a demonstração.
Com o Teorema 3 deduzimos que $V - A + F = 2$ o que implica em $\chi(G) + F$ ser invariante em grafos planares alcançando o objetivo proposto no trabalho.

Referências

[1] LUCCHESI, Cláudio Leonardo, **Introdução à Teoria dos grafos.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática pura e aplicada, 1979.
[2] Diestel, Reinhard (2005), **Graph Theory**, Springer-Verlag New York 1997, 2000.
[3] GISOLDI, D. V., **A Característica de Euler**, 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, UFRPE, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/ . Acesso em: 10 ago. 2020.