OS TEOREMAS DE CEVA E DE MENELAUS: IRMÃOS SEPARADOS POR 15 SÉCULOS

Pedro Victor Souza Freitas, Jhonata Avelar dos Santos
Gilson S. Ferreira Jr. & Thiago Yukio Tanaka (orientadores)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - Recife/PE
pedro-victor@msn.com, jhonata.avelar@hotmail.com, gilson.simoesj@ufrpe.br, thiago.tanaka@ufrpe.br

1. Resumo

Neste pôster abordaremos os Teorema de Ceva e de Menelaus, teoremas de épocas diferentes, mas intimamente ligados, porém não equivalentes. Além das validações de ambos os teoremas, exploraremos algumas aplicações e justificaremos o título deste trabalho analisando a relação entre os dois teoremas. Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta auxiliar na construção de figuras e comprovação dos resultados.

2. Introdução

Menelaus, com suas importantes contribuições na área de Geometria. Nascido em 70 d.C., viveu durante toda sua juventude em Alexandria, mudando-se quando mais velho para Roma com o objetivo de continuar seus estudos. Esse alexandrinense é mais conhecido pela obra Sphaerica, que trata de superfícies esféricas e por um teorema que leva o seu nome e que será um dos objetos de estudo deste trabalho. O Teorema de Menelaus lida com triângulos e proporções que uma reta gera ao partir seus lados e prolongamentos de lados desse triângulo.
Em outro momento da historia, aproximadamente 15 séculos depois do nascimento de Menelaus, nasce na Itália, filho de uma família bastante numerosa, Giovanni Ceva. Um matemático promissor e consequentemente tornou-se matemático, físico e engenheiro hidráulico. Além disso, em 1678 Publicou o livro *"De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio"*, e como seu percursor Menelaus, ele demonstra o teorema que posteriormente levará o seu nome, ademais, nesse livro Ceva cita o Teorema de Menelaus. Posto isso, cabe evidenciar o Teorema de Ceva, tal teorema trata-se de uma relação envolvendo um triângulo e as suas cevianas.
Ao decorrer deste trabalho, dados dois pontos A e B quaisquer, denotaremos por AB o segmento que une os pontos A e B, por $\overleftrightarrow{AB}$ a medida do segmento AB e por $\overleftrightarrow{AB}$ a reta que passa por A e B. Denotaremos também por ΔABC o triângulo definido por três pontos não colineares A, B e C, por $\angle A\hat{B}C$ o menor ângulo definido por AB e BC. Por último, denotaremos a área do ΔABC por $[ABC]$.

3. O Teorema de Ceva

Definição 1. Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice a um ponto do lado oposto ou ao prologamento desse lado. Portanto, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB ou nos seus prolongamentos, respectivamente de um ΔABC, os segmentos AX, BY e CZ são cevianas.
Alguns exemplos particulares de cevianas são as medianas, alturas e bissetrizes. Esse termo tem origem no nome do matemático já citado italiano Giovanni Ceva.

Teorema (Ceva). Dado ΔABC qualquer e as cevianas AX, BY e CY, essas cevianas são todas concorrentes, se e somente se, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$

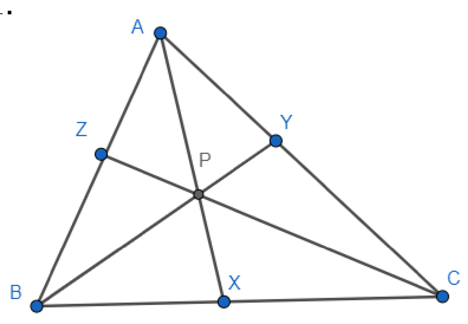

Figura 1: *Teorema de Ceva. [Fonte: Autores.]*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que as cevianas internas AX, BY e CZ são concorrentes. por relação de triângulos de mesma altura, temos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{[AZC]}{[BZC]} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{[AZP]}{[BZP]}.$$

Usando a regra simples de proporção, obtemos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{[AZC]-[AZP]}{[BZC]-[BZP]}.$$

Mas geometricamente observamos que,

$$\frac{[AZC]-[AZP]}{[BZC]-[BZP]} = \frac{[ACP]}{[BCP]}.$$

Segue daí que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{[ACP]}{[BCP]}. \tag{1}$$

De maneira análoga, podemos provar que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{[ABP]}{[ACP]} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{[BCP]}{[ABP]}. \tag{2}$$

Segue da equação (1) e das equações (2) que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{[APC]}{[BPC]} \cdot \frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[BCP]}{[ABP]} = 1.$$

$(\Leftarrow)$ Suponha que as cevianas são AX, BY e CZ' todas se intersecta em um único ponto e a ceviana CZ não intersecta as outras duas cevianas, já citadas, em um único ponto, como mostra a figura.

Figura 2: *Ilustração refente a volta da demonstração. [Fonte: Autores.]*

Como consequência da primeira parte já demonstrada sabemos que, $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1,$
no entanto, como hipótese temos $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$
à vista disso, $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$
por fim, cancelando os termos em comum temos $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}$, como dentro de um segmento não pode ter dois pontos denominando as mesmas proporções para os extremos, isso implica que $Z' = Z$.

□

Aplicação do Teorema de Ceva. *Dado o ΔABC Provemos que todas as suas bissetrizes são concorrentes em um único ponto que é denominado Incentro.*

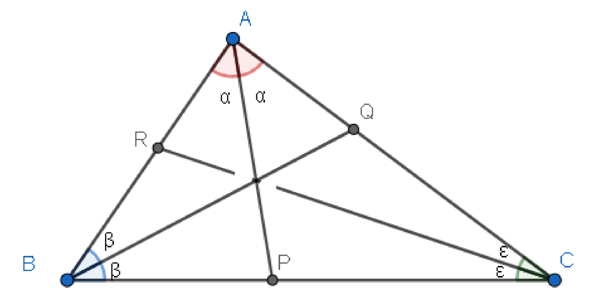

Figura 3: *Aplicação do Teorema de Ceva. [Fonte: Autores.]*

Solução. Sem perda de generalidade, vamos supor que a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C$ encontra o lado BC em P, da mesma forma, a bissetriz do ângulo $\angle A\hat{B}C$ encontra o lado AC em Q e a bissetriz do ângulo $\angle A\hat{C}B$ encontra o lado AB em R. Posto isso, usando o Teorema da Bissetriz, sabemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \tag{3}$$

Da mesma maneira,

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}. \tag{4}$$

Então, multiplicando (3) e (4) obtemos: temos,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1.$$

Portanto, como $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = 1$ pelo Teorema de Ceva todas as bissetrizes são concorrentes.

4. O Teorema de Menelaus

Teorema (Menelaus) Dado qualquer triângulo ΔABC, seja X um ponto no prolongamento do lado BC e Y e Z pontos nos lados AC e AB, respectivamente (ver figura 1). Os pontos X, Y e Z são colineares, se e somente se, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$

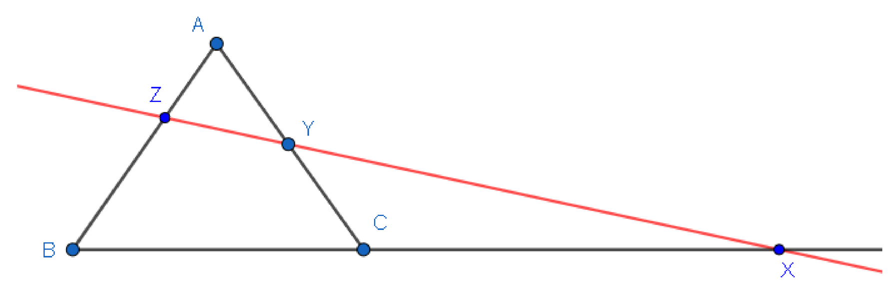

Figura 4: *Teorema de Menelaus. [Fonte: Autores.]*

Demonstração: Esta demonstração é semelhante a demonstração do Teorema de Ceva, basta traçar os segmentos AX e BY.

Aplicação do Teorema de Menelaus. *No triângulo ΔABC, D é o ponto médio de AB, E está sobre BC, tal que $\overline{BE} = 2\overline{EC}$. Sabendo que $\angle A\hat{D}C = \angle B\hat{A}E$, calcule o valor do $\angle B\hat{A}C$*

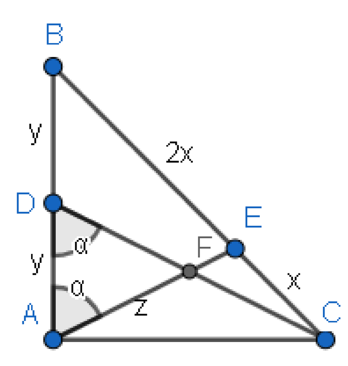

Figura 5: *Aplicação Teorema de Menelaus. [Fonte: Autores.]*

Solução: Aplicando Aplicando o Teorema de Menelaus no ΔCDB com o segmento de reta que contém os pontos A, F e E, temos,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} = 1. \tag{5}$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{AD} = y$ e $\overline{AB} = 2y$, além disso, $\overline{EB} = 2x$ e $\overline{EC} = x$ e, por fim, $\overline{FD} = z$ porque $\Delta ADF.$ é um triângulo isósceles. Substituindo essas informações na equação a cima temos,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} = \frac{y}{2y} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{\overline{FC}}{z} = 1. \tag{6}$$

Logo, $\frac{\overline{FC}}{z} = 1 \Rightarrow \overline{FC} = z$ então, o triângulo ΔAFC também isósceles, sendo assim, $\angle F\hat{A}C = \angle F\hat{C}A$ portanto, para calcular $\angle B\hat{A}C$ basta visualizar o ΔADC por meio dele, sabemos que $2\alpha + 2\beta = 180^{\text{o}} \Rightarrow \alpha + \beta = 90^{\text{o}} = \angle B\hat{A}C$, como queríamos descobrir.

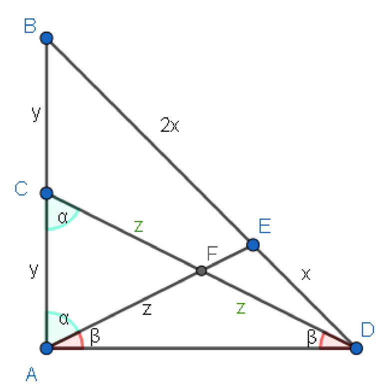

Figura 6: *Resolução da aplicação do Teorema de Menelaus. [Fonte: Autores.]*

5. Relação dos Teoremas de Ceva e Menelaus

Iremos agora relacionar os Teoremas de Menelaus e Ceva, antes de apresentarmos esta relação precisaremos da seguinte definição,

Definição 2. Dados os pontos A, B, M e N em uma reta cuja distribuição é da maneira como mostra a figura 7. Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB quando $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, isto é quando M e N dividem o seguimento AB em proporções iguais. Esses pontos são chamados de conjugados harmônicos na razão K sobre $\overline{AB}$.

Uma vez definido a noção de conjugado harmônico é possível relacionar, os teoremas de Ceva e Menelaus. Para isto em um triângulo ΔABC, tome um ponto Y no lado AC e um ponto Z no lado BC, de modo que a reta $\overleftrightarrow{YZ}$ não seja paralela ao lado AB, como mostrado na figura abaixo.

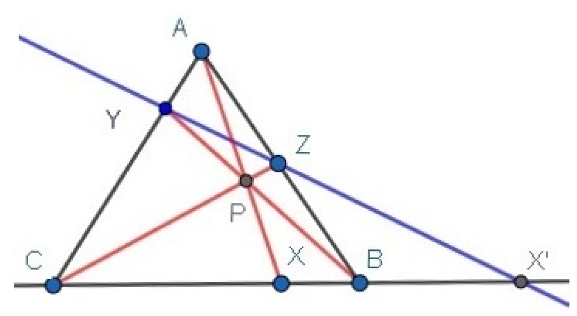

Figura 7: *Relação entre os Teoremas de Ceva e de Menelaus via conjugados harmônicos. [Fonte: Autores.]*

Como é possível possível ver também na figura acima, a reta $\overleftrightarrow{YZ}$ corta o prolongamento do lado AB no ponto X' e construindo a cevina que sai do vértice C e que passa pelo ponto P onde as cevianas $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ se intersectam obtemos o ponto X. Com essa informações podemos aplicar os teoremas de Cerva e Menelaus no triângulo ABC formando as seguintes equações:
Pelo Teorema de Ceva:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1. \tag{7}$$

Pelo Teorema de Menelaus:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX'}}{\overline{CX'}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1. \tag{8}$$

Igualando e simplificando as equações (7) e (8) teremos:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BX'}}{\overline{CX'}} \Rightarrow X \ e \ X' \text{ são conjugados harmônicos}$$

Com isso concluímos que os teoremas não são equivalentes, pois por mais que tenham hipóteses muito parecidas os pontos X e X' não são os mesmos, mas estes estão intimamente ligados pois são conjugados harmônicos de razão K sobre o lado AB do triângulo.
Podemos observar a relação entre Ceva e Menelaus pela ótica de qualquer um desses teoremas, isto é, a partir dos três pontos colineares do Teorema de Menelaus podemos sempre mover dois pontos nos lados ou prolongamentos, preservando o terceiro ponto fixo e a colinearidade, consequentemente, o posicionamento do seu conjugado hormônico. Por outro lado, dadas três cevianas que respeitem o Teorema de Ceva, podemos sempre mover dois pontos nos lados ou prolongamentos de lados que as definem, preservando de maneira idêntica ao Teorema de Menelaus a posição do terceiro ponto e novamente do seu conjugado harmônico.

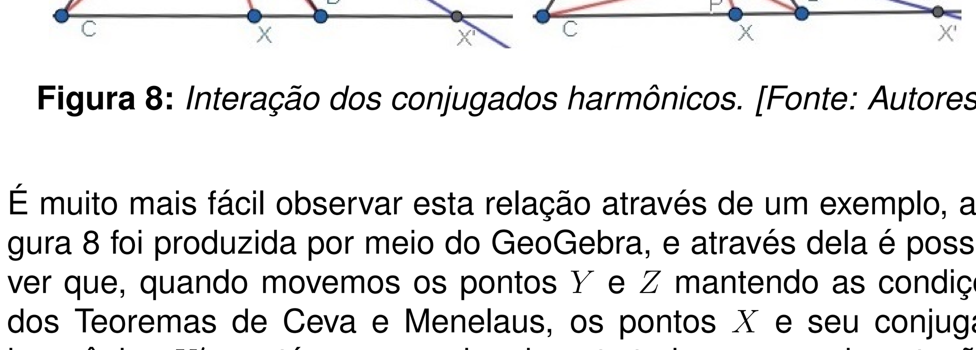

Figura 8: *Interação dos conjugados harmônicos. [Fonte: Autores.]*

É muito mais fácil observar esta relação através de um exemplo, a Figura 8 foi produzida por meio do GeoGebra, e através dela é possível ver que, quando movemos os pontos Y e Z mantendo as condições dos Teoremas de Ceva e Menelaus, os pontos X e seu conjugado harmônico X' mantém-se parados durante toda essa movimentação.

Referências

[1] S. José. *Os teoremas de Menelaus e Ceva*. 2015. Dissertação de Profmat-Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

[2] THIAGO, Cícero, Curso de Geometria, Nível 2, Aula 14, Teorema de Ceva e Teorema Menelaus Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, (2013). Disponível no site: http://poti.impa.br/upload/Aula%2014%20-%20Ceva%20e%20Menelaus.pdf'

[3] FERREIRA. francisco. *Unificando os teoremas de Menelaus e Ceva.* 2017. Dissertação de Profmat-Universidade Federal Cariri, Ceará, 2017.