Simetria de π nas p-métricas

Adiel Jamesson S. da Silva, Letianne Alves V. de Pontes,
João A. M. Gondim & Thiago Yukio Tanaka (orientadores)

Universidade Federal Rural de Pernambuco, PE, Brasil

adiel8404@gmail.com, letiannea@gmail.com, joao.gondim@ufrpe.br e thiago.tanaka@ufrpe.br

Resumo

O famoso número irracional π, cuja aproximação com seis casas decimais é $3,141592$, aparece em diversos contextos matemáticos. No Ensino Básico, essa constante é apresentada como fator no cálculo do comprimento e área da circunferência. Neste trabalho, abordamos a noção de π como sendo a razão entre as medidas de comprimento e diâmetro da circunferência (de raio unitário) na p-métrica. Nesta métrica, a distância entre os pontos $A(a,b)$ e $X(x,y)$ é calculada como sendo $d_p((a,b),(x,y)) = \sqrt[p]{|x-a|^p + |y-b|^p}$, ou seja, é uma generalização da métrica euclidiana quando substituímos $p=2$. A construção de π será tomada de modo genérico utilizando alguns conceitos do cálculo diferencial e integral adaptados para a métrica em questão. A partir dessa construção, apresentaremos curiosidades e provaremos que se p e q são expoentes conjugados, ou seja, quando $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, podemos concluir que os valores de π nas métricas p e q são iguais. Para isso, mostraremos que os valores dos comprimentos de circunferência nas duas métricas coincidem quando p e q satisfazem a igualdade acima.

1. Introdução

Desde a antiguidade, tem-se a noção de que a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência pela medida do diâmetro resulta em uma constante que hoje sabemos que é irracional (aqui tomaremos o π como essa razão). Este número independe dos tamanhos que se tenham no comprimento da circunferência e no seu diâmetro.

Diferentes métricas induzem diferentes geometrias, o que implica que objetos que dependem das noções de distância têm formas distintas. A circunferência, por exemplo, altera a sua forma curva conhecida no $\mathbb{R}^2$. A noção de circunferência pode ser definida pelo conjunto de todos os pontos que têm uma mesma distância r, chamada de raio, de um ponto fixo (x_c, y_c), chamado de centro da circunferência. Assim, para um métrica d dada, podemos expressar a equação da circunferência por meio da seguinte expressão $d_p((x,y);(x_c,y_c)) = r$. O π, como sendo uma constante relacionada a esse objeto tem seu valor alterado à medida que mudamos essa forma de calcular distância, ou seja, essa métrica.

Um conjunto de métricas que causa essa mudança no espaço é dado pelas p-métricas. Essa é uma famosa família de métricas e para valores de p específicos temos outras métricas conhecidas. Para $p=1$ e $p=2$ temos, respectivamente, a métrica de Manhattan e a métrica euclidiana, e ainda, quando $p \to \infty$ é possível mostrar que isto resulta na métrica do máximo. Uma outra curiosidade é que nessa métrica as circunferências têm formato de quadrado para alguns valores de p.

2. Conceitos Básicos

Definição 1 *Uma métrica em $\mathbb{R}^2$ é uma função $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades ($\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$):*

(i) É definida positiva: $d(x,y) > 0$ e $d(x,y) = 0$ apenas quando $x = y$.

(ii) É simétrica: $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) Atende a desigualdade triangular: $d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Definição 2 *Seja $p \geq 1$. A p-métrica $d_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ é definida por $d_p((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt[p]{|y_1-x_1|^p + |y_2-x_2|^p}$.*

3. Construção de π_p

Um círculo de raio unitário centrado na origem é definido, de acordo com a métrica d_p, como:

$$C_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_p((x,y),(0,0)) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = 1\}.$$

O fato de considerar a circunferência de raio unitário e centrada na origem não altera a generalidade do processo, como colocado por Euler e Sadek(1999) em [2]. Utilizando a equação do objeto acima de C_p, foi construído no GeoGebra as circunferências na $p-$métrica para alguns valores de p.

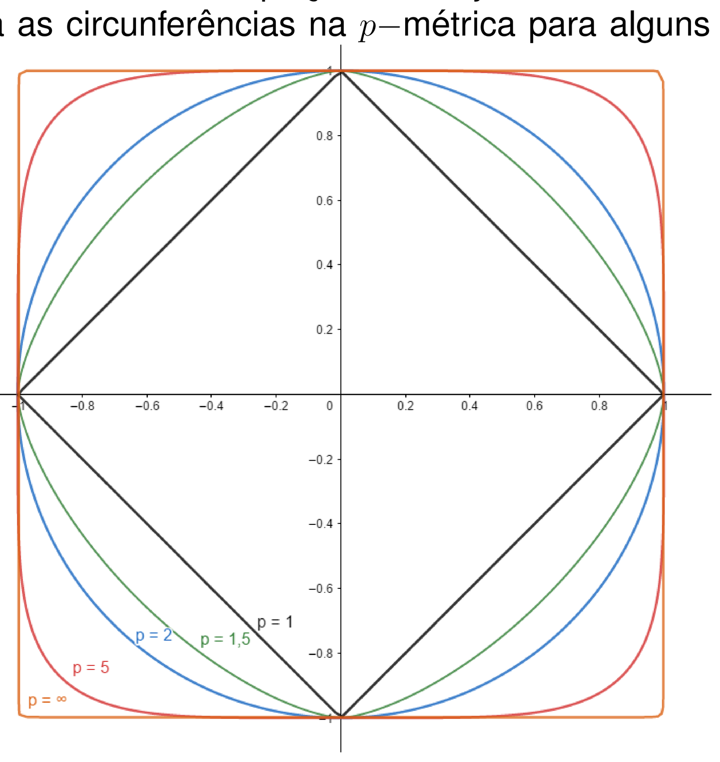

Figura 1: *Circunferências na $p-$métrica*

O comprimento de arco é a integral de $ds_p = (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}}$ sobre C_p. Dessa forma podemos escrever π_p como:

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int_{C_p} (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2}\int_{C_p} \left(1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} |dx|.$$

Como a figura possui simetria radial, o comprimento da circunferência será oito vezes o comprimento de arco calculado na reta $x=0$ a $x=y$. Fazendo $x=y$ em C_p teremos $x = 2^{-1/p}$ e sendo o diâmetro igual a 2, podemos calcular o valor de π_p usando $y = (1-x^p)^{\frac{1}{p}}$. Assim, tem-se:

$$\pi_p = \frac{8}{2}\int_0^{2^{-1/p}} \left(1 + \left|\left(\frac{1}{p}\right)(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}}(-p)x^{p-1}\right|\right)^{\frac{1}{p}} dx = 4\int_0^{2^{-1/p}} (1 + |x^{-p} - 1|^{1-p})^{\frac{1}{p}} dx.$$

Observa-se que para $p=1$ e $p=\infty$ tem-se $\pi_1 = \pi_\infty = 4$, já para $p=2$, temos que π_2 é o nosso valor familiar de $3,1415...$.

Tabela 1 - π_p para diferentes valores de p

p	π_p
1	4
5/4	3,4809...
3/2	3,2597...
9/5	3,1550...
2	π
9/4	3,1550...
3	3,2594...
5	3,4810...
∞	4

O gráfico a seguir nos mostra a variação do valor de π_p em função de p, indicando inclusive que o menor valor de π_p aparenta ocorrer quando $p=2$, como demonstram Adler e Tanton(2000) em [1]. Outra observação feita, analisando a construção da tabela, é que os valores calculados numericamente de π_p e π_q são muito próximos sempre que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

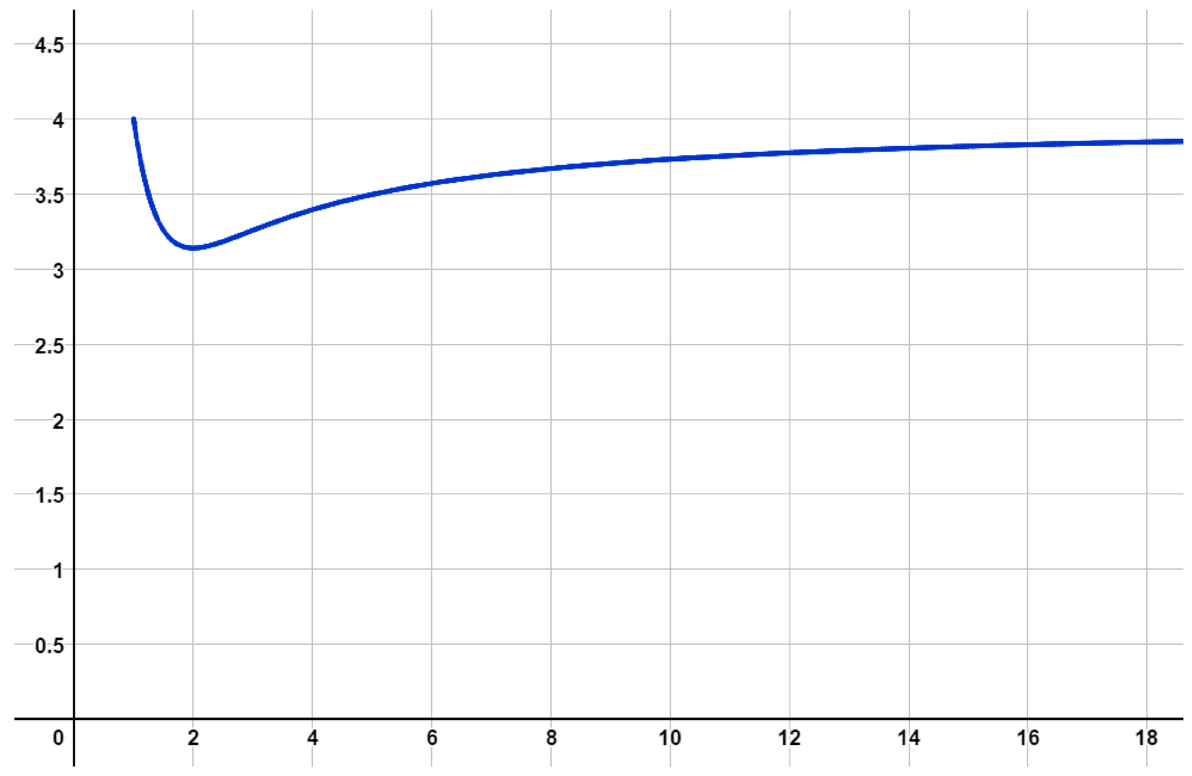

Figura 2: *Gráfico de π_p*

4. Propriedades de p

Teorema 1 *Para cada p em $1 < p \leq 2$ existe um q em $2 \leq q < \infty$ tal que $\pi_p = \pi_q$, desde que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Demonstração: Para mostrar que $\pi_p = \pi_q$ mostraremos que a integral do comprimento de arco de π_p e π_q são iguais. Calculando o comprimento de arco com $x = h_1(t)$ e $y = h_2(t)$, onde $t \in [0,\infty)$, teremos que $dx = h_1'(t)dt$ e $dy = h_2'(t)dt$ e então,

$$ds_p = \int_0^\infty \left(|h_1'(t)|^p + |h_2'(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

O t foi escolhido de modo que $t^{q/p}$ seja a inclinação da reta que passa na origem até o ponto $(h_1(t), h_2(t))$ em C_p.

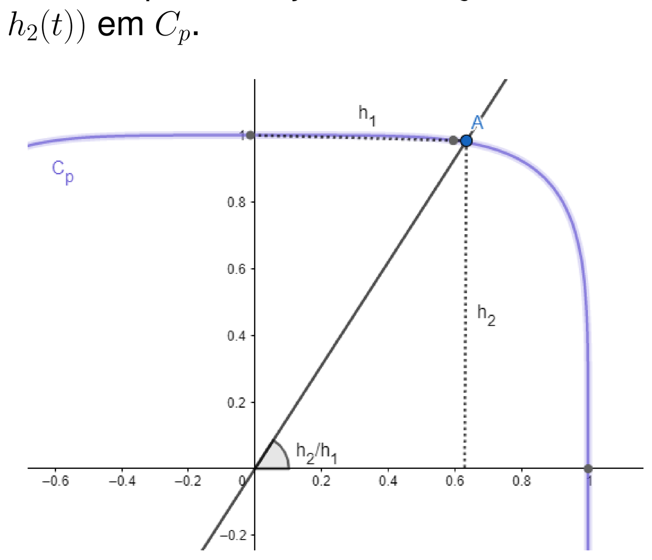

Figura 3: *O parâmetro t e a relação com h_1 e h_2*

Vamos agora encontrar as expressões de h_1 e h_2. Pela equação da circunferência em C_p, tem-se:

$$|h_1(t)|^p + |h_2(t)|^p = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{|h_2(t)|^p}{|h_1(t)|^p} = \frac{1}{|h_1(t)|^p}$$
$$\Rightarrow \quad 1 + |t^{\frac{q}{p}}|^p = |h_1(t)|^{-p} \quad \Rightarrow \quad |h_1(t)| = (1+t^p)^{\frac{-1}{q}}$$

Para obter $h_2(t)$ basta dividir a mesma expressão por $h_2(t)$ e segue analogamente. Parametrizando C_q de modo análogo com $x = s_1(t)$ e $y = s_2(t)$, obtemos:

$$s_1(t) = (t^p+1)^{\frac{-1}{q}} \quad e \quad s_2(t) = (t^{-p}+1)^{\frac{-1}{q}}$$

Considere $F(t) = -h_1 s_2 + s_1 h_2$. Em $t=0$ e $t \to \infty$ temos que $h_1 = s_1$ e $h_2 = s_2$ e ainda $F(0)=0$ e $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$, então $\int_0^\infty F'(t)dt = 0$. Essa equação pode ser escrita como

$$F(t) = -h_1 s_2 + s_1 h_2 \quad \Rightarrow \quad F'(t) = -h_1' s_2 - h_1 s_2' + h_2' s_1 + h_2 s_1',$$

Logo,

$$\int_0^\infty -h_1' s_2 - h_1 s_2' + h_2' s_1 + h_2 s_1' dt = 0$$

$$\int_0^\infty (-h_1' s_2 + h_2' s_1) dt = \int_0^\infty (-h_2 s_1' + h_1 s_2') dt \tag{1}$$

Agora vamos mostrar que a integral no lado esquerdo de (1) pode ser escrita como:

$$-h_1' s_2 + h_2' s_1 = (|h_1'|^p + |h_2'|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Para provar isso, primeiro transformaremos o lado esquerdo da igualdade acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -h_1' s_2 + h_2' s_1 &= -\Big(-\frac{1}{p}\Big)(t^q+1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{q-1} (t^{-p}+1)^{-\frac{1}{q}} \\ &\quad + \Big(-\frac{1}{p}\Big)(t^{-q}+1)^{-\frac{p+1}{p}} (-q) t^{-(q+1)} (t^p+1)^{-\frac{1}{q}} \\ &= \frac{q}{p}(t^q+1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p+1)^{\frac{1}{p}} t^{\left(\frac{1}{p-1}-1\right)}. \end{aligned}$$

Manipulando o lado direito de (2), temos:

$$\begin{aligned} (|h_1'|^p + |h_2'|^p)^{\frac{1}{p}} &= \left[\left(\frac{1}{p}(t^q+1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{q-1}\right)^p + \left(\frac{1}{p}(t^{-q}+1)^{-\frac{p+1}{p}} q t^{-(q+1)}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{q}{p}(t^q+1)^{-\frac{p+1}{p}} (t^p+1)^{\frac{1}{p}} t^{\left(\frac{1}{p-1}-1\right)}. \end{aligned}$$

Desse modo o integrando do lado esquerdo de (1) é igual a ds_p. Com um argumento análogo é possível mostrar que a integral do lado direito de (1) é igual a ds_q e então temos que $ds_p = ds_q$.

5. Considerações Finais

Verificamos até aqui que π assume diferentes valores quando mudamos a nossa maneira de calcular distâncias, ou seja, a métrica. Além disso, vimos que os valores que encontramos ao calcular π em um conjunto específico de métricas, as p-métricas, assumem mínimo em $p=2$ e que eles são iguais quando esses valores de p tem a característica de serem expoentes conjugados. Algo interessante a se observar é que o menor valor de π aparenta ocorrer quando $p=2$ nesse conjunto de métricas, e que além de um forte candidato a mínimo, esse valor é o único mínimo, olhando essa constante como uma função de p. Tanto a minimalidade quanto a unicidade são demonstráveis.

Outra interessante observação que pode ser feita é que para diferentes valores do nosso parâmetro t, temos diferentes valores para os comprimentos até determinado ponto, mas considerando todo o comprimento da bola em questão, se tomarmos dois valores de p e q tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então os comprimentos das circunferências C_p e C_q são os mesmos. O que nos mostra um certo sentido de simetria em relação aos resultados obtidos para π nas $p-$métricas.

Referências

[1] C. L. Adler; J. Tanton. π is the minimum value of Pi. **The College Mathematics Journal**, v. 31, n. 2, p. 102-106, Mar. 2000. Disponível em: JSTOR, www.jstor.org/stable/2687579. Acessado em 12 de maio de 2020.

[2] R. Euler; J. Sadek. The πs go full circle. **Mathematics Magazine**, v. 72, n.1, p. 59-63, Fev. 1999. Disponível em: www.maa.org/programs/faculty-and-departments/classroom-capsules-and-notes/the-pis-go-full-circle. Acessado em 13 julho de de 2020.

[3] J. B. Keller; R. Vakil. π_p, the value of π in l_p. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 116, p. 931-935, Jan. 2009. Disponível em: https://math.stanford.edu/ vakil/files/07-0333. Acessado em 12 de junho de 2020.