UM CONVITE À TEORIA DE SEMIGRUPO: O TEOREMA DE HILLE-YOSIDA

Autora: Maria Modesto da Silva
Coautor: Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo
Universidade Federal de Sergipe
marymodestt@gmail.com crumusic@yahoo.com.br

XX SEMANA DE MATEMÁTICA - DME - UNIR

Introdução

No atual cenário mundial percebe-se o desenvolvimento de inúmeros fenômenos sociais e naturais, que precisam de interpretações dos mais variados gêneros. A matemática é uma ciência que interpreta situações do cotidiano de maneira a formalizar com maior exatidão possivel tais aspectos. Ao longo dos últimos séculos, diversos cientistas dedicaram-se a formular matematicamente informações empiricas, dá-se destaque ao periodo da revolução industrial, onde havia grande necessidade da otimização do trabalho humano, fazendo-se produzir o máximo no menor tempo possível, momento em que ocorreu grande avanço de um ramo da matemática, a saber, a teoria das equações diferenciais.

Grande parte dos modelos matemáticos usados para o desenvolvimento tecnológico, desde meados do século XX, são descritos por meio de equações diferenciais, em especial, através de equações diferenciais parciais de evolução. Tais equações surgem principalmente em modelos matemáticos de processos que ocorrem em sistemas reais (físicos, químicos, biológicos, etc.) cujos estados podem ser caracterizados por um número infinito de parâmetros. Por este motivo, durante as últimas décadas a teoria das equações diferenciais parciais de evolução passou por um rápido desenvolvimento.

A teoria de semigrupo foi consideravelmente impulssionada a partir de 1948 com a demonstração do Teorema de Hille-Yosida. A posterior participação de importantes pesquisadores assim como o avanço de outras áreas da matemática permitiu consolidar a teoria, dando para ela autonomia e inúmeras aplicações em diversas áreas, tanto na matemática aplicada quanto na pura. Neste trabalho, nos dedicamos a mostrar esse resultado tão importante para teoria de semigrupo. O teorema recebeu o nome dos matemáticos Einar Carl Hille (1894-1980) e Kōsaku Yosida (1909-1990) que descobriram o resultado independentemente por volta de 1948.

Objetivos do trabalho

OBJETIVO GERAL: Enunciar e demonstrar o Teorema de Hille-Yosida.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Definir conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos.
2. Mostrar resultados necessários para demonstração do Teorema principal.

Metodologia

O método de pesquisa utilizado no proceder metodológico é o dedutivo, pois partimos de hipóteses, as quais utilizamos para chegar no resultado almejado. Quanto a natureza da pesquisa, trata-se de uma pesquisa bibliográfica, pois se refere ao estudo de materiais já existentes, a saber, (MELO, 2006) e (PAZY, 1983).

Apresentação e Discurssão dos Dados

O Teorema de Hille-Yosida

A priori definimos alguns conceitos básicos da teoria de semigrupo, conceitos estes necessários para enunciar e demonstrar o Teorema de Hille-Yosida.
No que se segue, X é um espaço de Banach sobre os reais (ou complexos), e $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ é um operador linear, onde

$$D(A) = \{u \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \ \ existe\}.$$

Definição: Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ é dito **limitado** se existe $c > 0$, tal que

$$\|Au\|_Y \leq c\|u\|_X \qquad \forall e \in D(A).$$

Caso contrário, A é dito um **operador ilimitado**, isto é, se existe uma sequência $u_n \subset D(A)$ tal que

$$\frac{\|Au_n\|_Y}{\|u_n\|_X} \longrightarrow +\infty \quad quando \ n \to +\infty.$$

O operador linear A é dito **densamente definido** se $\overline{D(A)} = X$.
Definição: Uma família de um parâmetro $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um **semigrupo de operadores lineares limitados** se
$i) T(0) = I$, onde I é a identidade do operador em X;
$ii) T(t+s) = T(t)T(s)$ para cada $t, s \geq 0$.
O semigrupo $T(t)$ é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definido um semigrupo, vamos agora aos tipos de semigrupos bases do presente trabalho.
Definição: Uma família $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados é dita ser um $\mathbf{C_0 - Semigrupo}$ se são satisfeitas as seguintes propriedades:
$i) T(0) = I$;
$ii) T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;
$iii)$ Para cada $u \in X$ temos

$$T(t)u \to u \quad t \downarrow 0.$$

Definição: Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é dito **uniformemente limitado** se $\|T(t)\| \leq M$, e se $\|T(t)\| \leq 1$, dizemos que é um **semigrupo de contração**.
Definição: Seja $(T(t))_{t \leq 0}$ um $C_0 - semigrupo$ em X. O **gerador infinitesimal** do semigrupo é um operador linear $A : D(A) \to X$ onde

$$Au = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A).$$

Agora, mostraremos uma caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contração.
Teorema$(Hille - Yosida)$
Um operador (ilimitado) linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,
$i)$ A é fechado e densamente definido;
$ii)$ O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$:

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A demonstração do teorema é extensa e encontra-se no trabalho completo.

Conclusões

Neste trabalho, abordamos tópicos da Teoria de Semigrupo. MELO (2006, pg.6) destaca que esta teoria teve seu grande avanço no ano de 1948 com a demonstração do Teorema de Hille-Yosida. O resultado exposto neste artigo advém do enriquecimento do formalismo matemático ao longo de séculos, e o mesmo possui inúmeras vertentes. Haja vista que, na Análise Funcional, o Teorema de Hille-Yosida é uma aplicação no estudo de conjuntos resolventes. Já no estudo das equações diferenciais, tanto parciais quanto ordinárias, este resultado é usado como base para o desenvolvimento da sua teoria, auxiliando, por exemplo, na construção das equações do calor, onda e de Laplace. Com isso, nota-se sua demasiada importância em diversas áreas da matemática.

Referências

[1] MELO, R. A. **A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

[2] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer, 1983.