

Estudo Analítico da Estabilidade Linear do Problema Restrito dos Quatro Corpos



Autor: Clesio Carlos Souza Nascimento

Coautor: Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo

Universidade Federal de Sergipe

Clesiocarlos.ufs@gmail.com crumusic@yahoo.com.br

XX SEMANA DE MATEMÁTICA - DME - UNIR

Introdução

A Mecânica celeste é uma das principais áreas da matemática e sem dúvida também uma das mais antigas. Hoje o estudo na área da Mecânica Celeste é tão amplo que atinge praticamente todos os ramos da matemática, aceitando quaisquer dos enfoques matemáticos (matemática pura e matemática aplicada). Em particular, as Equações Diferenciais Ordinárias tem ainda um grande campo de estudo para os problemas de dinâmica. Alguns problemas específicos da Mecânica Celeste, por proporcionarem aos estudiosos do tema uma fartura teórica considerável, se eternizaram na área e recebem o nome de problemas clássicos, em suma, o problema dos dois corpos e o problema restrito dos três corpos. Mesmo antigos tais problemas, a exemplo das configurações centrais, ainda são fonte de muita pesquisa do mais alto nível. Problemas mais recentes como o problema do Equilíbrio relativo dos quatro corpos vêm sendo exaustivamente estudados por diversos grupos de pesquisa, trazendo um enorme benefício para diversas áreas da matemática, em especial para a Mecânica Celeste e Sistemas Dinâmicos.

O presente plano de trabalho desenvolve o estudo da estabilidade das soluções relativas no problema restrito dos quatro corpos, mais concretamente, trata sobre sistemas lineares, sistemas Hamiltonianos do Problema dos Quatro Corpos, que é um Sistema Hamiltoniano não linear. A priori, consideraremos três corpos no plano, os quais denominaremos de primários. As massas desses primários são m_0 , m_1 e m_2 . Para a formulação do problema, tomaremos $m_1 = m_2$ e que os primários com massas m_1 e m_2 orbitam o primário de massa m_0 em uma órbita circular e se encontram em lugares simétricos em relação ao corpo de massa m_0 , ou seja, os corpos de massa m_1 e m_2 sempre distam o diâmetro da circunferência descrita pela órbita destes. Consideraremos um outro corpo de massa m_3 que se move no mesmo plano que os outros três corpos. Tomaremos esse corpo de forma que sua massa não seja considerável a ponto de mudar a trajetória dos outros corpos perante a força gravitacional Newtoniana. Nosso problema restrito circular planar, consiste em descrever o movimento do quarto corpo, onde a única força exercida no problema seja a força de atração gravitacional newtoniana.

Objetivos do trabalho

OBJETIVO GERAL: Descrever o movimento de um corpo de massa infinitesimal submetido unicamente a ação gravitacional newtoniana de outros três corpos no espaço.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1 Encontrar as equações do movimento do corpo de massa infinitesimal e suas respectivas soluções.
- 2 Encontrar o Hamiltoniano do problema e seus respectivos pontos de equilíbrio.
- 3 Analisar, através da Hessiana, a natureza desses pontos de equilíbrio.
- 4 Identificar a estabilidade de cada solução de equilíbrio do problema.

Metodologia

Para o proceder metodológico foi utilizado o método dedutivo, uma vez que, tínhamos as premissas (hipóteses) como

verdadeiras, e as usaremos para chegar na conclusão do que queríamos. O tipo de pesquisa utilizada foi a pesquisa bibliográfica, já que, o trabalho foi realizado com base em outros trabalhos, principalmente no trabalho citado em [3].

Apresentação e Discursão dos Dados

A priori foram feitas a análise e a formulação do problema utilizando a isomorfia que existe entre o \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} , uma vez que, as propriedades de \mathbb{C} facilitarão as contas. O primeiro resultado obtido após a formulação do problema foram as equações do movimento do corpo de massa m_3 .

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \phi_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \phi_y \end{cases} \quad (1)$$

onde

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{8\mu}{P_1} + \frac{8\mu}{P_2} + \frac{1 - 2\mu}{P}$$

com $\mu \in [0, 1/2]$.

Foram calculados as soluções de equilíbrio das equações do movimento as quais observamos que coincidiam com os pontos de equilíbrio da função $\phi(x, y)$. Obtivemos seis pontos de equilíbrio $L_i(\mu)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

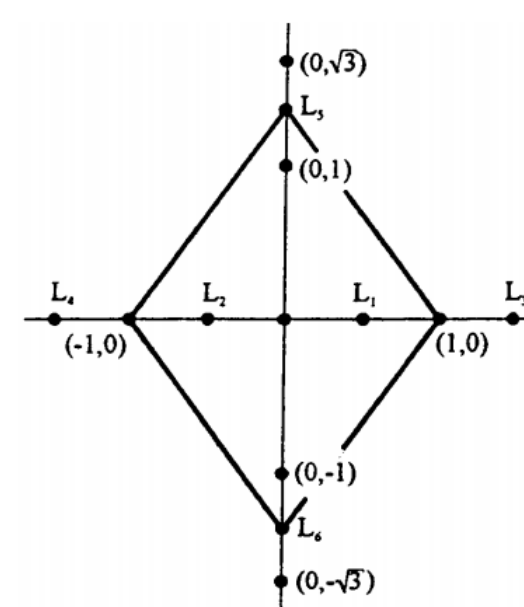


Figura 1: Pontos de equilíbrio relativo dispostos em suas posições no plano.

Natureza das soluções de equilíbrios

Agora escreveremos as equações do movimento na sua forma hamiltoniana, calcularemos as soluções de equilíbrio do sistema hamiltoniano correspondente e a natureza dessas soluções de equilíbrio. As equações do movimento na forma hamiltoniana são:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = H_{y_1} \\ \dot{x}_2 = H_{y_2} \\ \dot{y}_1 = -H_{x_1} \\ \dot{y}_2 = -H_{x_2} \end{cases} \quad (2)$$

onde

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + y_1x_2 - y_2x_1 - U(x_1, x_2)$$

com $U(x, y)$ sendo

$$U(x, y) = \frac{8\mu}{P_1} + \frac{8\mu}{P_2} + \frac{1 - 2\mu}{P}$$

A função $H : E \rightarrow \mathbb{R}^2$, induz o campo vetorial $X_H = (H_{y_1}, H_{y_2}, -H_{x_1}, -H_{x_2})$. Um ponto $p \in E$ é dito ponto de equilíbrio do sistema (2), quando $X_H(p) = 0$. De (2) e da expressão obtida para a função hamiltoniana H , segue que um ponto de equilíbrio (x_1, x_2, y_1, y_2) de (2) é dado por $(x_1, x_2, -x_1, -x_2)$, onde x_1 e x_2 satisfazem

$$\phi_{x_1}(x_1, x_2) = 0$$

$$\phi_{x_2}(x_1, x_2) = 0.$$

Portanto cada um dos seis pontos críticos de $\phi(x, y)$ nos dá uma solução de equilíbrio para o sistema hamiltoniano (2).

A partir da análise do polinômio característico da matriz da parte linear do sistema (2), obtivemos os seguintes resultados sobre as naturezas das soluções de equilíbrio:

- 1 Os pontos de equilíbrio correspondem a centro parabólicos, quando $\mu = 0$.
- 2 Para $\mu \in (0, 1/2]$, os pontos de equilíbrio colineares (L_i ; $i = 1, 2, 3, 4$) são sela centro.
- 3 Os pontos de equilíbrio triangulares (L_i ; $i = 5, 6$), para $0 < \mu < \mu_0$, são centro genéricos. (μ_0 é o único ponto que satisfaz $\beta(\mu_0) = \frac{1}{4}$, onde $\beta = \phi_{x_1x_1}\phi_{x_2x_2}$)
- 4 Os pontos de equilíbrio triangulares são centro degenerados do sistema hamiltoniano (2), quando $\mu = \mu_0$.
- 5 Os pontos de equilíbrio triangulares são sela complexa do sistema hamiltoniano (2), quando $\mu_0 < \mu \leq 1/2$.

Conclusões

A questão vinculada ao estudo da natureza das soluções de equilíbrio, é o estudo da estabilidade descrita por Liapunov. Esse estudo é de suma importância para sabermos, se ao colocarmos o corpo de massa m_3 , com velocidade relativa nula, perto o suficiente de um ponto de equilíbrio L_i , se ele permanecerá assim. Se o ponto de equilíbrio for estável, isto acontecerá, caso não seja, se o ponto for instável em algum momento o ponto ficará o corpo ficará distante do ponto.

Seguindo a descrição feita por Liapunov, se uma posição de equilíbrio L_i é estável então os autovalores da parte linear do sistema são todos imaginários puros. Portanto se existe um autovalor com parte real diferente de zero, a posição de equilíbrio é instável.

Como consequência do que foi descrito acima segue que:

- 1 Para $\mu = 0$, todas as soluções de equilíbrio são estáveis.
- 2 Quando $\mu \in (0, 1/2]$ as soluções de equilíbrio colineares são instáveis para o sistema linear e consequentemente para o sistema (2).
- 3 Para $\mu \in (0, \mu_0)$, as soluções de equilíbrio triangulares são estáveis.
- 4 Para $\mu \in (\mu_0, 1/2]$ as soluções de equilíbrio triangulares são instáveis, tanto para o sistema linearizado quanto para o original, pois todos os autovalores possuem parte real não nula.

Referências

- [1] ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] BIRKHOFF, G. D. **Dynamical systems**. Providence, 1927. (Amer. Math. Soc. Colloq.; 9).
- [3] MARANHÃO, Dante Leal. **Estudi del flux d'un problem restringit de quatre cossos**. Tese de doutorado. Universitat Autònoma de Barcelona, 1995.
- [4] CABRAL, H. E., DIACU, F. **Classical and Celestial Mechanics - The Recife Lectures**. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002.