ESTABILIDADE LINEAR DO PÊNDULO DE GALILEU

Autor: Ortenilton dos Santos Filho
Coautor: Gerson Cruz Araujo

Universidade Federal de Sergipe

orteniltonfilho@gmail.com
crumusic@yahoo.com

Introdução

Em mecânica clássica, um dos estudos mais relevantes ao longo dos séculos foi referente a do movimento harmônico simples, onde o mais influente experimento é o pêndulo simples, desenvolvido pelo célebre cientista Galileu Galilei em meados do século XVII. Historicamente, o problema surgiu de maneira extremamente intuitiva, advindo das observações feitas por Galileu Galilei, ao analisar a forma como os candelabros oscilavam na catedral de Pisa, analisando as frequências e amplitudes em função do tempo.

A comudidade científica apropriada do formalismo matemático desenvolvido no século XVIII e do apogeu da Mecânica Celeste, expandiu os estudos obtendo inúmeras variações deste fenômeno, e até hoje há um arsenal significativo de pesquisas feitas por cientistas conceituados mundialmente que o ponto de partida é o estudo advindo de Galileu. Dois séculos depois da descoberta de Galileu, na Russia, o matemático Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, desenvolveu uma teoria que nos ajuda a concluir analiticamente se os pontos de equilíbrios encontrados do sistema diferencial associado é estável ou instável.

Resumidamente, para estipular a estabilidade do ponto de equilíbrio, pelo metódo de Lyapunov, deve-se determinar uma função com determinadas condições de continuidade e diferenciabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrios. Como veremos, ao longo do texto, a equação do movimento do pêndulo simples com ponto de suspensão fixo ou variando por uma lei harmônica, pode ser descrita por um sistema Hamiltoniano não linear. Em seguida, pela técnica de linearização de sistemas não lineares em torno de pontos de equilíbrios, obteremos o sistema Hamiltoniano linear, com a função Hamiltoniana sendo quadrática. Admitiremos que a função de Lyapunov seja a função Hamiltoniana obtida. Aplicando o método de Lyapunov, iremos verificar se os pontos críticos encontrados são estáveis no sentido de Lyapunov ou instáveis.

Objetivo

Este trabalho tem como objetivo estudar a estabilidade linear no sentido de Lyapunov do pêndulo de Galileu, para atingir tal objetivo, faremos uso da Teoria Qualitativa das EDO's.

Metodologia

Para alcançar os resultados obtidos, os autores fizeram uma revisão bibliográfica da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, em reuniões presenciais, a priori, e posteriormente por vídeoconferência, devido à pandemia da COVID-19.

Apresentação e discussão dos dados

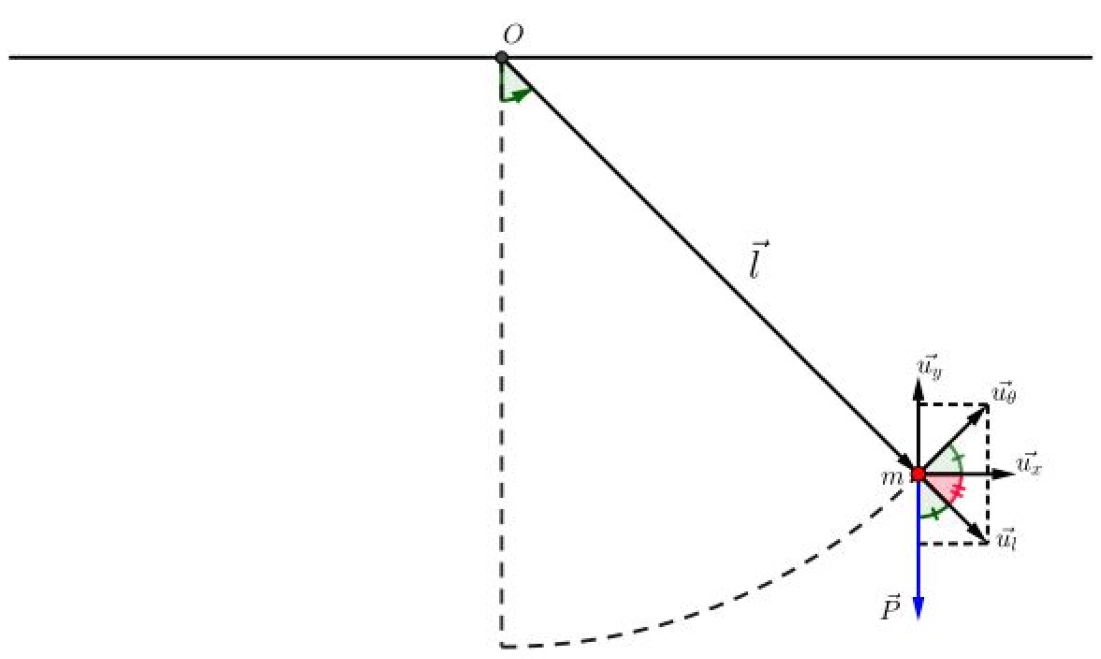

Figura 1: Ilustração de um pêndulo
Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere acima a ilustração que representa o pêndulo de Galileu, no qual $\vec{l}$ é o vetor posição da massa fixada no bulbo do pêndulo suspensa do ponto O e de comprimento $l = |\vec{l}|$, $\vec{P}$ é o vetor peso da massa, $\vec{u_l}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{l}$ e $\vec{u_\theta}$ é o vetor unitário perpendicular a $\vec{l}$ e sua direção está para sentido de crescimento do ângulo θ. Os vetores $\vec{u_l}$ e $\vec{u_\theta}$ acompanham o pêndulo no seu movimento.

A partir da formulação matemática do problema, encontramos

$$\begin{cases} -\vec{T} + mgcos\,(\theta) = ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ -mgsen\,(\theta) = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}. \end{cases} \tag{1}$$

como a equação que descreve o movimento do pêndulo de Galileu.

Posteriormente, encontramos $P_0 = (0,0)$ como ponto de equilíbrio. Encontrado o ponto de equilíbrio, fizemos a análise de sua estabilidade, usando o seguinte resultado:

Teorema 1 (Teorema de Lyapunov) Dada uma função V definida em alguma vizinhança D de (θ_0, ϕ_0) que seja contínua, que V possua derivadas parciais contínuas em D, $V(\theta_0, \phi_0) = (0,0)$, $V(\theta, \phi) > 0, \forall(\theta, \phi) \neq (\theta_0, \phi_0)$ e que os pontos que satisfazem $V(\theta, \phi) = C$ formem uma curva fechada em torno de (θ_0, ϕ_0) para toda constante C para as quais estas curvas estejam em D. Então :

1. Se $\dot{V}(\theta, \phi) \leq 0, \forall(\theta, \phi)$ em D, (θ_0, ϕ_0) é estável;
2. Se $\dot{V}(\theta, \phi) < 0, \forall(\theta, \phi)$ em D, (θ_0, ϕ_0) é assintoticamente estável;
3. Se $\dot{V}(\theta, \phi) > 0, \forall(\theta, \phi)$ em D,(θ_0, ϕ_0) é instável.

Vamos assumir que a função de Lyapunov do pêndulo é dada pela função Hamiltoniana do sistema. Neste caso, a função Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$V(\vartheta, \varphi) \equiv H(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2}(\vartheta^2 + \varphi^2) \tag{2}$$

Resultado 1 Assumimos V definido em (2) definido em uma vizinhança de $(0,0)$, V é contínua, possui derivadas contínuas em $(0,0)$, $V > 0$ e que $V(\vartheta, \varphi) = C$ é um círculo com centro em $(0,0)$ e raio $\sqrt{2C}$; $C > 0$. Logo, segue que a origem do sistema é um ponto de equilíbrio estável, que pode ser representado geometricamente por:

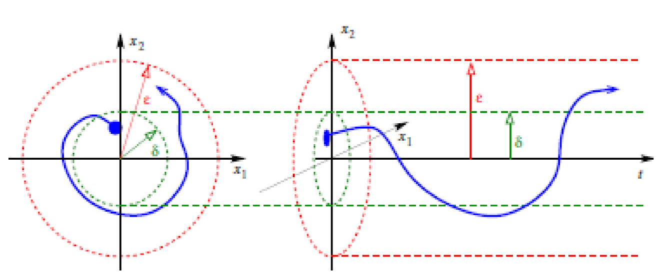

Figura 3: Estabiliade no sentido de Lyapunov
Fonte: TÔRRES (2017).

Conclusão

Inicialmente, fizemos a modelagem matemática do problema. Partindo disso, usando a teoria Hamiltoniana, encontramos o sistema Hamiltoniano associado para poder fazer a análise da estabilidade do ponto de equilíbrio encontrado $P_0 = (0,0)$.

Para saber a natureza dos pontos de equilíbrios, isto é, se analiticamente os pontos de equilíbrio são estáveis, utilizou-se o critério imposto por Lyapunov, para saber da estabilidade ou instabilidade do ponto de queilíbrio P_0, pertinentes ao problema do Pêndulo de Galileu, alvo do estudo estipulado nesta pesquisa. Com a teoria de Lyapunov, podemos concluir que o sistema é estável numa vizinhaça próxima de P_0.

Referências

BRAUER, F. **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations**. Reprint. Originally published: New York: W. A. Benjamin, 1969.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 4 ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2010.

OLIVEIRA, D. A. S. **O probelma Carregado de N-Corpos**. Sergipe: UFS, 2018. Dissertação de mestrado.

Pêndulo Simples. Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2008. Disponível em: ¡https://docplayer.com.br/31874760-Departamento-de-fisica-da-faculdade-de-ciencias-da-universidade-de-lisboa-mecanica-a-2008-09-pendulo-simples.html¿. Acesso em: 22/08/2020, às 18:48

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1970. (Projeto Euclides)

TÔRRES, L. A. B. **Teoria de estabilidade de Lyapunov**.FNCL,Setembro, 2017.

VIDAL, C. **Curso de Equações Diferenciais Ordinárias**. Recife. 2004.

VIDAL, C. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos**. Recife. 2003.