ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA MASSA-MOLA SIMPLES

Autor: José Gabriel Santos
Coautor 1: Maynara Donato de Souza
Coautor 2: Ortenilton dos Santos Filho

Universidade Federal de Sergipe
Universidade Federal de Minas Gerais
Universidade Federal de Sergipe

gs96003868@gmail.com
maynara@ufmg.br
orteniltonfilho@gmail.com

Introdução

Segundo Präss, em 1660, o físico inglês Robert Hooke (1635-1703) observando o comportamento mecânico de uma mola, descobriu que as deformações elásticas sofridas por uma mola presa a um suporte fixo por uma extremidade e com um objeto acoplado à outra, obedecia a uma certa conformidade. Mais especificamenete, ele percebeu que havia uma relação de proporcionalidade entre o peso do objeto acoplado e a deformação por ela sofrida. Depois de alguns estudos, Hooke pôde então anunciar o resultado das suas observações sob forma de uma lei, a qual conhecemos por Lei de Hooke.

Desde então, muitos outros estudos têm sido realizados, tomando como base o trabalho de Hooke, pondo em uso o resultado obtido por ele, a exemplo deste trabalho. Aqui, consideramos o sistema massa-mola simples vertical (descrito anteriormente) inicialmente estático, sob a demarcação de uma posição inicial, logo em seguida, este sofre uma ação externa e entra em oscilação até atingir o equilíbrio, sujeitando-se a uma outra famosa lei física, a Segunda Lei de Newton (Isaac Newton, 1643-1747, Inglaterra).

Permita-nos informar que analisamos o sistema massa-mola sob um olhar matemático, conforme a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, com destaque para os famosos sistemas de Hamilton (Wiliam Hamilton, 1805 - 1865, Dublim). Mais geralmente, nosso intuito é utilizar a Teoria de Lyapunov para sistemas hamiltonianos a fim de analisar o comportamento do ponto de equilíbrio, isto é, almejamos compreender o comportamento das soluções da Equação Diferencial obtida através modelo anteriormente descrito na vizinhança do ponto de equilíbrio.

É importante ressaltar que nosso desejo de compreender o sistema massa-mola simples vertical é movido pelo intuito de facilitar a compreensão do sistema massa mola acoplada (em desenvolvimento). Realizamos, por meio de revisão literária, um estudo da Teoria de Equações Diferenciais ordinárias com o intuito de fomentar aos autores o interesse pela área de estudo e a publicação de futuros trabalhos.

Objetivo

Este trabalho tem como objetivo estudar a estabilidade de equilíbrio do sistema massa-mola simples, fazendo uso dos resultados clássicos de estabilidade de um sistema de EDO, bem como da Teoria de Lyapunov.

Metodologia

Para a realização deste trabalho, foram feitos estudos preliminares acerca do tema abordado, através da revisão da literatura. Para isto, foram feitas videoconferências entre os autores.

Apresentação e discussão dos dados

Considere um sistema massa-mola vertical constituído por um bloco de massa m acoplado a uma extremidade de uma mola com constante elástica k, cuja segunda extremidade está presa a uma base fixa; em seu momento estático e suponha $y = 0$ a posição inicial do sistema.

Feita uma perturbação neste sistema, aplicando uma força sobre o bloco de massa m, obtemos uma nova configuração, cujo resultado é uma deformação na mola e consequentemente, uma mudança de posição do bloco, a qual denominamos y_1 , conforme a Figura 1.

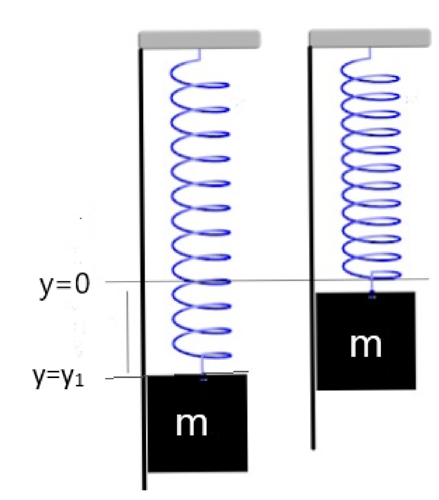

Figura 1: Sistema massa-mola
Fonte: Adaptado de Andrade e Assis.

A partir da formulação matemática do problema, encontramos

$$\ddot{y}_1 = \frac{-k}{m} \cdot y_1 \tag{1}$$

como equação do movimento do sistema.

Feita algumas contas, encontramos $P = (0,0)$ como ponto crítico do sistema. Faremos a análise da estabilidade deste ponto crítico encontrado. Para isto, recorremos aos seguintes resultados:

Considere a EDO de primeira ordem da forma:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

onde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1 (Critério de Lyapunov) Seja $\overline{x}$ um ponto de equilíbrio de 2. Se existe uma Função de Lyapunov $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ para $\overline{x}$, então $\overline{x}$ é estável. Se existe uma função de Lyapunov estrita então é assintoticamente estável.

Durante os estudos, encontramos a função

$$H(y, v) = \frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{k}{m}y^2\right)$$

como função de Lyapunov para o sistema. Tal função é também a função Hamiltoniana do problema. Portanto, isto nos diz que o nosso sistema, na vizinhança do equilíbrio $P = (0,0)$ é estável no sentido Lyapunov. Mais geralmente, nos informa que as soluções do sistema se comportam de maneira parecida com o decorrer do tempo, conforme a Figura 2 a seguir:

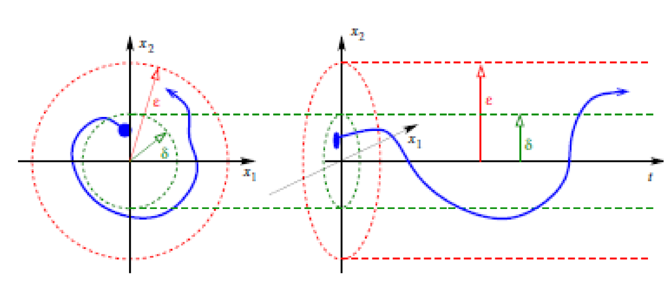

Figura 2: Estabiliade no sentido de Lyapunov
Fonte: TÔRRES (2017).

Conclusão

Após a formulação do problema de maneira matemática, encontramos um ponto de equilíbrio para o sistema, $P = (0,0)$. Usando a teoria estudada, podemos concluir que o sistema é estável, tanto pela análise dos autovalores da matriz associada, quanto pela teoria de Lyapunov.

Referências

ANDRADE, D.X. de.; ASSIS, P. E. G. **Sólitons e Sistemas não-lineares**. Disponível em: ¡https://sites.google.com/site/solitonsufg/sitema-massa-mola¿. Acesso em: 21/08/2020.

NOVAIS, M. M. **Estabilidade Global e Aplicações ao Modelo Epidemiológico SEIRS**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

OLIVEIRA, D. A. S. **Estabilidade espectral no problema carregado de n-corpos**. Sergipe: UFS, 2018. Dissertação de mestrado.

PRÄSS, A. R. **A lei de Hooke**. Disponível em: ¡https://www.fisica.net/mecanicaclassica/a lei de hooke.pdf¿. Acesso em: 22/08/2020.

SOUZA, M. D. de. In: Anais do I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional da Região Nordeste. Anais. Juazeiro (BA), UNIVASF, 2019. **A equação de Mathieu.** Disponível em: ¡https//www.even3.com.br/anais/IERMACNE/211727-EQUACAO-DE-MATHIEU¿. Acesso em: 16/08/2020.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 3, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

TÔRRES, L. A. B. **Teoria de estabilidade de Lyapunov**.FNCL,Setembro, 2017.

VIDAL, C. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos**. Recife. 2003.