Números irracionais e a demonstração por redução ao absurdo

Pedro Renilson Alves Ferreira[1], **Maiky Manoel Santana da Silva**[2]
Maria Cecília Macedo Belo[3] **e Eudes Mendes Barboza**[4]
pedrorenilson2011@gmail.com[1], maikymanoelif@gmail.com,[2]
mcecilia.macedo1707@outlook.com,[3] eudes.barboza@ufrpe.br[4]
Licenciatura em Matemática - Universidade Federal Rural de Pernambuco

1. Introdução

No contexto matemático, há vários conjuntos númericos, em particular, encontramos o conjunto dos números irracionais, que possui elementos como as raízes n-ésimas de números primos e também as constantes π e e (o número de Euler). Um número é dito irracional quando não pode ser representado em forma de fração entre dois inteiros, o que equivale geometricamente a noção de incomensurabilidade entre segmentos.
De acordo com Gonçalves e Possani (2009), os pitagóricos tinham conhecimento suficiente para "elaborarem a famosa prova por redução ao absurdo de que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis". Esse fato mostra que a técnica de redução por absurdo está presente na matemática desde a Antiguidade.
Segundo Morais Filho (2013), o método consiste em supor que uma sentença do tipo "se H, então T" não ocorre e a partir disso obter uma contradição $\sim Q \bigwedge Q$. A validade desse tipo de demonstração é garantida pela equivalência

$$(H \longrightarrow T) \Longleftrightarrow ((H \wedge \sim T) \longrightarrow (\sim Q \wedge Q)).$$

A partir disso, temos a seguinte questão: como a técnica de redução ao absurdo está relacionada à irracionalidade de alguns números, como as raízez n-ésimas de primos, o número de Euler (e) e o π?

2. Objetivos

O objetivo traçado neste trabalho é apresentar a relação que existe entre alguns números irracionais e a demosntração por absurdo, realizando, para tanto, um breve estudo sobre os números irracionais e sobre essa técnica de demonstração.

3. Metodologia

Fizemos uso de pesquisa bibliográfica, de cunho qualitativo, a partir da qual obtemos definições, propriedades relativas aos números estudados e resultados preliminares que nos auxiliaram nas demonstrações das irracionalidades e fundamentaram os resultados.

4. Apresentação e discussão dos dados

4.1 Irracionalidade da raíz n-ésima de um número primo

Definimos que um número $p \in \mathbb{N}$ é primo se $p \neq 1$ e se os únicos divisores de p são 1 e p.
Consideremos o seguinte resultado P_1: *Seja p primo tal que ab é divisível por p, então a ou b também será divisível por p* (ver Gonçalves, 2003) Iremos usá-lo para demonstrar o Teorema 1.

Teorema 1. *Se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo e $n \geq 2$, então $\sqrt[n]{p}$ é irracional.*

De início, suponha, por absurdo, que $\sqrt[n]{p}$ é um número racional, isto é, pode ser escrito como $\sqrt[n]{p} = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e primos entre si. Dessa forma, podemos escrever

$$p = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow a^n = pb^n. \qquad (1)$$

Assim, temos que a^n é divisível por p. Logo, por P_1, a também é divisível por p, isto é, podemos escrever $a = pk$, com $k \in \mathbb{Z}$. Agora, substituindo $a = pk$ em (1), obtemos

$$(pk)^n = pb^n \Rightarrow p \cdot p^{n-2}k^n = b^n.$$

Fazendo $p^{n-2}k^n = h$, ficamos com $b^n = ph$. Uma vez que b^n é divisível por p, por P_1 teremos que b é divisível por p, ou seja, podemos escrever $b = ps$, com $s \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, temos que tanto a quanto b são múltiplos de p, o que é um absurdo.

4.2 Irracionalidade de e

O número de Euler é uma das constantes mais conhecidas da Matemática, aparecendo em diversos contextos. Por exemplo, pode ser obtido através do limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Este número pode ainda ser representado por uma série, obtida através da Série de Taylor da função exponencial $f(x) = e^x$. Precisamente, temos

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Vamos mostrar a irracionalidade desse número, usando para isso a técnica de redução ao absurdo e o fato de que em uma série geométrica, para $0 < r < 1$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$.

Teorema 2. *O número de Euler (e) é irracional.*

Suponha, por absurdo, que e seja um número racional, ou seja, $e = \dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Dessa forma, segue que

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{j=q+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

Considerendo a série geométrica com razão $r = \dfrac{1}{q+1}$, temos que

$$\sum_{j=q+1}^{\infty}\frac{1}{j!} < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q},$$

obtendo, assim,

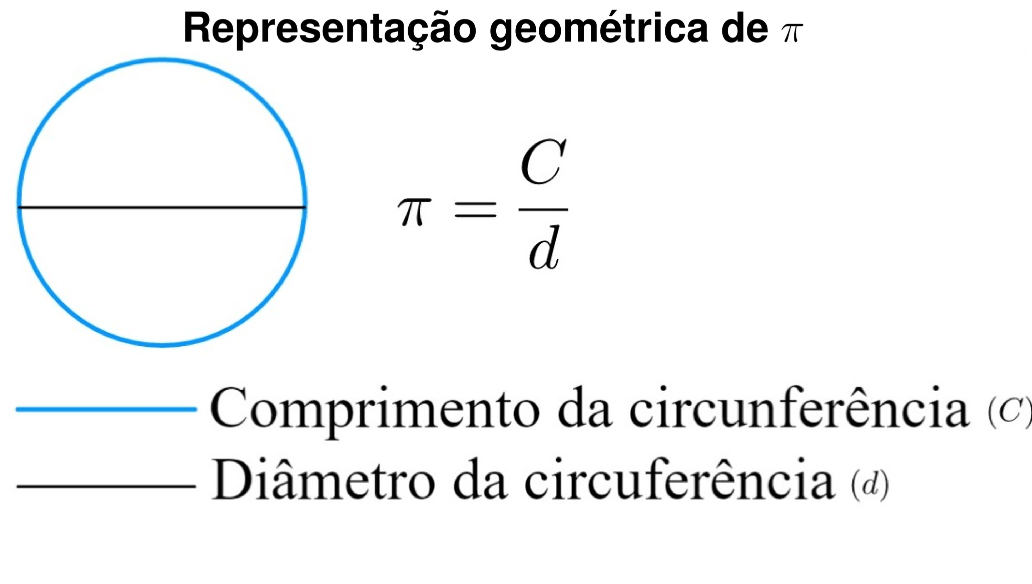
$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}.$$

Como os denominadores $1!, 2!, \cdots, q!$ são divisores do fator $q!$, o termo do meio da inequação acima é um número inteiro. Logo, teríamos um inteiro entre 0 e 1, o que é um absurdo.

4.3 Irracionalidade de π

Uma das principais definições do número π está relacionada com a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Provavelmente, este é o número irracional mais conhecido. Apesar dessa polularidade, a demonstração da sua irracionalidade, utilizando-se da redução ao absurdo, usa argumentos mais elaborados do que os das demostrações anteriores.

Representação geométrica de π



Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$, em que $n \in \mathbb{N}$. Em Moraes Júnior (2015), mostra-se que $D^k f(0)$ e $D^k f(1)$ são números inteiros para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Além disso, outro resultado que nos ajudará na demonstração da irracionalidade de π é o Teorema Fundamental do Cálculo, que nos diz que se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente derivável em $[0,1]$, então $\int_0^1 g'(x)\,dx = g(1) - g(0)$. Sua demonstração consta em Stewart (2013). A partir desses fatos, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 3. *O número π é irracional.*

Suponhamos, por absurdo, que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Definamos a função

$$F(x) = q^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\}.$$

Uma vez que $D^k f(0)$ e $D^k f(1)$ são inteiros e da suposição de que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, segue que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros. Além disso, temos que

$$\{F'(x)sen(\pi x) - \pi F(x)cos(\pi x)\}' = sen(\pi x)\{F''(x) + \pi^2 F(x)\}.$$

Calculando a segunda derivada de F, com a derivada de ordem $2n+2$ de f é nula, obtemos que

$$sen(\pi x)\{F''(x) + \pi^2 F(x)\} = p^n\pi^2 f(x)sen(\pi x).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, com $g(x) = F'(x)sen(\pi x) - \pi F(x)cos(\pi x)$, temos

$$p^n\pi^2\int_0^1 f(x)sen(\pi x)\,dx = \pi F(1) + \pi F(0) \Rightarrow$$

$$p^n\pi\int_0^1 f(x)sen(\pi x)\,dx = F(1) + F(0).$$

Por outro lado, para $0 < x < 1$, temos $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$. Daí, segue que

$$0 < \pi p^n\int_0^1 f(x)sen(\pi x)\,dx < \pi\frac{p^n}{n!}\int_0^1 sen(\pi x)\,dx = \frac{2p^n}{n!},$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2p^n}{n!} = 0$, podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\dfrac{2p^n}{n!} < 1$. Daí,

$$0 < \pi p^n\int_0^1 f(x)sen(\pi x)\,dx < 1$$

e, portanto, temos que $0 < F(1) + F(0) < 1$, o que é um absurdo, pois $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros.

5. Considerações finais

Neste trabalho, utilizamos técnica de redução ao absurdo para provar a irracionalidade de π, de e e de raízes n-ésimas de primos. Em cada uma das demonstrações usamos as definições e/ou propriedades de cada um desses números para, a partir da suposição de que poderiam ser escritos como uma fração irredutível entre números inteiros, chegarmos a um absurdo. Concluímos, dessa forma, que a demostração da irracionalidade desses números está intimamente ligada a técnica de redução ao absurdo.

Referências

[1] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro: Associoação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[2] GONÇALVES, Carlos H. B.; POSSANI, Claudio. **Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga.** Revista Matemática Universitária, v. 1, n. 47, p. 16-24, dez. 2009.

[3] MORAES JÚNIOR, Rogério Jacinto de. **Enumerabilidade e não Enumerabilidade de Conjuntos, uma Abordagem para o Ensino Básico.** 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.

[4] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um Convite à Matemática.** Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

[5] POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico**: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. 2012. 235 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

[6] STEWART, James. **Cálculo: Volume 1.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.